

# XXVII FEDERALNO TAKMIČENJE IZ FIZIKE ZA SREDNJE ŠKOLE

BILTEN



Sarajevo, 15. 04. 2023.

Organizator: Društvo fizičara u FBiH

Domaćin: Prirodno-matematički fakultet u Sarajevu

Datum održavanja: 14. 04. 2023.

Bilten pripremio: Benjamin Fetić



**POKROVITELJ TAKMIČENJA**



Komisije za sastavljanje i pregledanje zadataka

**Grupa A**

- 1) Dino Habibović, supervizor
- 2) Kenan Saračević,
- 3) Danis Bradarić
- 4) Nola Šegalo

**Grupa B**

- 1) Amina Mević, supervizor
- 2) Ajla Karić
- 3) Naida Ustavdić
- 4) Amra Salčinović Fetić

**Grupa C**

- 1) Alisa Ramić, supervizor
- 2) Naida Dedić
- 3) Mirsad Tunja
- 4) Emir Baručija

**Grupa D**

- 1) Majra Šišić Čaluk, supervizor
- 2) Fatih Žgalj
- 3) Muhamed Sokolović

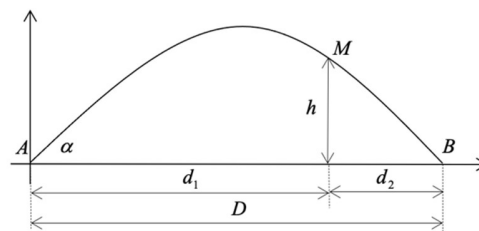
U organizaciji takmičenja učestvovali su Senad Isaković, Nina Brkić, Farah Hisham Nafi i Benjamin Fetić

## XXVII FEDERALNO TAKMIČENJE IZ FIZIKE UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA

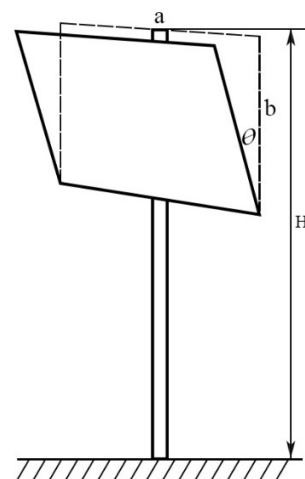
Sarajevo, 15.04.2023.

### A: MEHANIKA I TERMODINAMIKA

**Zadatak 1:** Tijelo je ispaljeno sa površine zemlje pod uglom  $\alpha$ , a njegov maksimalni domet je  $D$ . Kada se nađe na visini  $h$  prešlo je horizontalnu udaljenost  $d_1$ , a do površine zemlje je horizontalna udaljenost  $d_2$ . Pokazati da je  $\text{tg } \alpha = \frac{hD}{d_1 d_2}$ . (25 b)



**Zadatak 2:** Radnici su dobili zadatak da postave novi reklamni bilbord kako bi se najavilo održavanje Federalnog takmičenja iz fizike. Bilbord je postavljen na stub visine  $H = 9$  m, dužina njegove gornje i donje stranice je  $a = 504$  cm, a dužina bočnih stranica iznosi  $b = 238$  cm (pogledati sliku). Bilbord je sastavljen od 2 dijela: tanki ram i ploča sa reklamom. Ploča sa reklamom napravljena je od aluminija površinske gustoće  $\sigma_{\text{AL}} = 9,7 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2}$ . Masa stranice rama koja ima dužinu  $a$  je  $m_a = 110$  kg, a  $m_b = 50$  kg je masa bočne stranice dužine  $b$ . Plan je bio da se bilbord postavi pod uglom od  $9^\circ$  u odnosu na vertikalnu ravan ali su radnici već bili umorni i odlučili su da otprilike nagnu bilbord za neki ugao umjesto da rade precizna mjerenja. Zbog umora njihova procjena bila je jako loša i bilbord je bio naget za  $\theta = 19^\circ$  u odnosu na vertikalnu ravan. Zbog velike greške u procjeni, bilbord nije dugo izdržao i već prvim udarom vjetra njegova gornja stranica se otkočila i bilbord je počeo da pada tako što je rotirao oko ose koja prolazi kroz donju stranicu sve dok ne udari o stub. Nakon udara o stub i druga stranica se otkoči i bilbord pada vertikalno naniže prema tlu. Izračunati ugaonu brzinu  $\omega$  koju bilbord ima pri udaru o stub, te ukupno vrijeme potrebno da vrh bilborda dotakne tlo. Smatrati da se svi dijelovi bilborda nalaze u jednoj ravni (zanemarive debljine) i da se sve vrijeme kreću kao jedna cjelina. Moment inercije štapa oko jednog njegovog kraja računa se po formuli  $I = \frac{ml^2}{3}$ , gdje je  $l$ -dužina štapa i  $m$ -masa štapa. (25 b)



**Zadatak 3:** Europa je jedan od četiri najveća Jupiterova satelita i smatra se jednim od najperspektivnijih mjesta za traženje vanzemaljskog života u našem Sunčevom sistemu. Vjeruje se da ima podzemni okean, koji sadrži dva puta više vode od svih Zemljinih okeana zajedno. Procjenjuje se da je ovaj okean dubok oko 100 kilometara, što je otprilike 10 puta dublje od Zemljinih okeana.



Olakšice radi, u ovom zadatku pretpostavimo da je Europa homogena i potpuno sačinjena od vode.

- Ukoliko zanemarimo rotaciju Europe, odredite pritisak u njenom središtu. Radijus Europe iznosi 1560km, a gustina vode je  $1000 \frac{kg}{m^3}$ . Gravitaciona konstanta je  $\gamma = 6.674 \times 10^{-11} \frac{m^3}{kg s^2}$ . Ukratko objasnite kako bi se ovaj pritisak promijenio ukoliko bismo uzeli u obzir i rotaciju? **(12 b)**
- Vjeruje se da je Evropa prekrivena debelim slojem leda, ali ispod leda postoji ogroman podzemni okean slane tečne vode. Uprkos velikoj udaljenosti od Sunca, ova voda se ne može sva zamrznuti. Ukratko objasnite šta sprječava Europine okeane da se čitavi zamrznju. **(3 b)**
- Ukoliko bi se sva Europa ipak uspjela pretvoriti u led, koliko bi se promijenilo trajanje jednog dana na Europi? Jedan dan na Europi koja je čitava od vode traje 3.55 Zemljinih dana. Gustina leda iznosi 0.916 gustine vode. **(10 b)**

**Zadatak 4:** U vertikalnom cilindru zatvorenom sa oba kraja nalazi se masivan klip sa čije se obje strane nalazi po jedan mol vazduha. U ravnotežnom stanju na temperaturi  $T = 300$  K zapremina gornjeg dijela cilindra je  $\eta = 4$  puta veća od zapremine donjeg dijela. Na kojoj temperaturi će odnos dvaju zapremina biti  $\eta' = 3$ ? **(25 b)**

Napomena: Vrijeme predviđeno za izradu zadataka je 3 sata. Nije dozvoljena upotreba pomoćne literature. Dozvoljena je upotreba kalkulatora.

## XXVII FEDERALNO TAKMIČENJE IZ FIZIKE UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA

Sarajevo, 15.04.2023.

### A: MEHANIKA I TERMODINAMIKA

#### Rješenje 1:

$$\begin{aligned}d &= v_0 \cos(\alpha)t \\ h &= v_0 \sin(\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2\end{aligned}\quad (7 b)$$

Eliminacijom parametra  $t$

$$h = \operatorname{tg}(\alpha)d - \frac{g}{2v_0^2} \frac{d^2}{\cos^2(\alpha)}\quad (3 b)$$

Maksimalni domet je

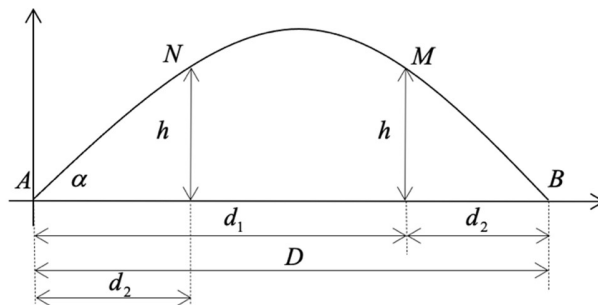
$$D = \frac{2v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} \Rightarrow \frac{g}{2v_0^2} = \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{D}\quad (3 b)$$

Uvrštavajući u prethodnu jednačinu dati izraz imamo:

$$h = \operatorname{tg}(\alpha)d - \operatorname{tg}(\alpha) \frac{d^2}{D}\quad (6 b)$$

Ova kvadratna jednačina ima dva rješenja, a zbog simetrije parabole, horizontalna udaljenost od tačke M do tačke B je isto kao horizontalna udaljenost od tačke A do tačke N koja je na istoj visini kao tačka M. Proizvod tih rješenja (Vietova formula):

$$d_1 d_2 = \frac{hD}{\operatorname{tg}(\alpha)}\quad (6 b)$$



## Rješenje 2:

Da bi našli ugaonu brzinu bilborda pri udaranju u stub koristiti ćemo se zakonom održanja energije. Jasno je da se ukupna gravitaciona potencijalna energija koju bilbord ima u početnom trenutku pretvara u kinetičku energiju rotacije:

$$Mg\Delta h = \frac{1}{2}I\omega^2, \quad (3b)$$

gdje je:

$$\begin{aligned} M &= 2m_a + 2m_b + \sigma_{AL}ab = 2 * 110 \text{ kg} + 2 * 50 \text{ kg} + 9,7 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2} * 5,04 \text{ m} * 2,38 \text{ m} \\ &= 436,3 \text{ kg} \quad (1b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta h &= h_2 - h_1 = H - b + \frac{b}{2}\text{Cos}(\theta) - H + b + \frac{b}{2} = \frac{b}{2}(\text{Cos}(\theta) + 1) \\ &= \frac{2,38 \text{ m}}{2}(\text{cos}(19^\circ) + 1) = 2,315 \text{ m} \quad (1b) \end{aligned}$$

$M$  – ukupna masa bilborda,  $\Delta h$  – visinska razlika položaja centra masa na početku i kraju rotacije

Moramo naći i ukupan moment inercije bilborda, njega ćemo dobiti tako kao sumu momenata inercije svih dijelova koji se kreću, to jeste 2 bočne stranice, gornja stranica i ploča. Kada bilbord posmatramo sa bočne strane primjetimo da ploča i bočne stranice izgledaju kao štapovi koji se okreću oko jednog svog kraja pa ćemo njihove momente inercije izračunati na sljedeći način:

$$I_1 = \frac{\sigma_{AL}ab * b^2}{3} = \frac{9,7 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2} * 5,04 \text{ m} * 2,38 \text{ m} * (2,38 \text{ m})^2}{3} = 219,7 \text{ kgm}^2 \quad (2b)$$

$$I_2 = \frac{m_b * b^2}{3} = \frac{50 \text{ kg} * (2,38 \text{ m})^2}{3} = 94,4 \text{ kgm}^2 \quad (2b)$$

Također primjetimo da moment inercije gornje stranice rama možemo računati kao moment inercije tačke oko ose koja prolazi kroz donju stranicu bilborda:

$$I_3 = m_a * b^2 = 110 \text{ kg} * (2,38 \text{ m})^2 = 623,1 \text{ kgm}^2 \quad (2b)$$

Ne uzimamo u obzir moment inercije donje stranice jer ona ostaje fiksirana. Na osnovu ovoga možemo dobiti ukupan moment inercije bilborda koji rotira oko ose koja prolazi kroz njegovu donju stranicu:

$$\begin{aligned} I &= I_1 + 2I_2 + I_3 = 219,7 \text{ kgm}^2 + 2 * 94,4 \text{ kgm}^2 + 623,1 \text{ kgm}^2 \\ &= 1031,6 \text{ kgm}^2 \quad (1b) \end{aligned}$$

Sada možemo naći ugaonu brzinu koju bilbord ima pri udaru o stub:

$$\omega = \sqrt{\frac{2Mg\Delta h}{I}} = \sqrt{\frac{2 * 436,3 \text{ kg} * 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} * 2,315 \text{ m}}{1031,6 \text{ kgm}^2}} = 4,38 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad (3b)$$

Sada ćemo naći ukupno vrijeme padanja bilborda. Ugaono ubrzanje dobiti ćemo iz:

$$M_F = I\alpha, \quad (2b)$$

gdje je  $M_F$  moment sile koja djeluje na bilbord. U našem slučaju imamo samo gravitacionu silu koja djeluje na bilbord pa će ukupan moment sile biti:

$$M_F = \frac{b}{2} Mg * \sin(19^\circ) = 1658,2 \text{ Nm} \quad (1b)$$

Sada možemo dobiti ugaono ubrzanje:

$$\alpha = \frac{M_F}{I} = \frac{1658,2 \text{ Nm}}{1031,6 \text{ kgm}^2} = 1,61 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \quad (1b)$$

Vrijeme potrebno da bilbord udari u stub dobijamo iz:

$$\varphi = \frac{\alpha t^2}{2}, \quad (0.5b)$$

gdje je  $\varphi$  ugao koji opiše centar mase bilborda a ono iznosi  $\varphi = \pi - \theta = 2,81 \text{ rad}$

$$t_1 = \sqrt{\frac{2(\pi - \theta)}{\alpha}} = \sqrt{\frac{2 * 2,81 \text{ rad}}{1,61 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}}} = 1,87 \text{ s} \quad (2b)$$

Drugi dio kretanja će biti slobodan sa visine  $h = H - 2b = 4,24 \text{ m}$ . Iz izraza za pređeni put slobodnog pada:

$$h = \frac{gt^2}{2}, \quad (0.5b)$$

možemo dobiti vrijeme  $t_2$ :

$$t_2 = \sqrt{\frac{2(H - 2b)}{g}} = \sqrt{\frac{2 * 4,24 \text{ m}}{9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} = 0,93 \text{ s} \quad (2b)$$

Ukupno vrijeme kretanja bilborda do udara o tlo na kraju iznosi:

$$t = t_1 + t_2 = 2,80 \text{ s} \quad (1b)$$

### Rješenje 3: a)

Pokažimo kako je unutar samog satelita gravitaciono polje linearna funkcija od  $r$ . Uzmimo



$$mg = \frac{\gamma m M(r)}{r^2}, \quad G = \frac{\gamma M(r)}{r^2} \quad (1b)$$

Kako je gustina satelita na svakom dijelu jednaka (aproksimacija), primjećujemo da

$$\frac{M_{tot}}{R^3} = \frac{M(r)}{r^3} \quad (1b)$$

Ukoliko izrazimo  $M(r)$  iz navedene jednačine, i uvrstimo u prvu jednačinu, imamo:

$$G = \frac{\gamma}{r^2} \frac{M_{tot}}{R^3} r^3 = \frac{4}{3} \frac{\gamma \rho \pi R^3}{R^3} r = \frac{4}{3} \gamma \rho \pi r \quad (1b)$$

Posmatrajmo sada komad mase iznad nekog proizvoljnog rastojanja  $r < R$ . Srednja jačina polja u kojoj se taj komad mase nalazi iznosi:

$$G_{sr} = \frac{G_1 + G_2}{2} = \frac{\frac{4}{3} \rho \pi \gamma r + \frac{4}{3} \rho \pi \gamma R}{2} = \frac{2}{3} \rho \pi \gamma (r + R) \quad (2b)$$

Gravitaciona sila koja djeluje na ovaj komad mase je:

$$F = \Delta m \cdot G_{sr} = \rho \Delta S (R - r) \cdot \frac{2}{3} \rho \pi \gamma (r + R) \quad (1b)$$

odnosno

$$F = \frac{2}{3} \gamma \pi \Delta S \rho^2 (R^2 - r^2) \quad (1b)$$

Dakle, pritisak na rastojanju  $r$  od centra Europe je:

$$p = \frac{2}{3} \gamma \pi \rho^2 (R^2 - r^2) \quad (1b)$$

U centru satelita,  $r=0$ , stoga

$$p(0) = \frac{2}{3} \pi \gamma \rho^2 R^2 \quad (1b)$$

Uvrštavajući numeričke vrijednosti, ovaj rezultat postaje:

$$p(0) = 340 \text{ MPa} \quad (1b)$$

Razlika u pritisku između rotirajuće i nerotirajuće Europe zavisi od brzine rotacije i drugih faktora kao što su gustina, viskoznost, temperatura... Općenito, rotacija satelita stvorit će ispupčenje na ekvatoru, što rezultuje povećanjem pritiska u blizini ekvatora i smanjenjem pritiska u blizini polova. Za ravnomjerno rotirajuću homogenu Europu sa konstantnom gustinom, pritisak u centru će biti niži od nerotirajuće Europe iste veličine i gustine. To je zato što rotacija smanjuje efektivnu težinu fluida iznad centra satelita, što rezultira smanjenjem hidrostatskog pritiska u centru. (2b)

*Alternativno rješenje:*

Gravitaciona sila na mali element mase može se izraziti kao:

$$dF_g = \frac{\gamma M(r) \rho S dr}{r^2}$$

Slično, element sile pritiska je:

$$dF_p = -S dp$$

Posmatrani djelić mase je u ravnoteži, stoga

$$dF_p = dF_g$$

Odnosno

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{\gamma M(r) \rho}{r^2} \quad (3b)$$

Uvrštavajući sljedeći izraz za masu proizvoljne obuhvaćene kugle radijusa  $r$  u gornju jednačinu

$$M(r) = \frac{4r^3 \pi \rho}{3}$$

imamo

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{4}{3} \pi \gamma \rho^2 r$$

Integrirajući obje strane u granicama od  $r$  (proizvoljno) do  $R$  (površine satelita), imamo:

$$\int_{P(r)}^{P(R)} dp = -\frac{4}{3} \pi \gamma \rho^2 \int_r^R r dr$$

Rješavajući gornje integrale, dobivamo:

$$p(r) = p(R) + \frac{2}{3} \pi \gamma \rho^2 (R^2 - r^2) \quad (4b)$$

Znajući da pritisak na površini satelita treba biti jednak nuli, odnosno  $P(R)=0$ , konačno dobivamo:

$$p(r) = \frac{2}{3} \pi \gamma \rho^2 (R^2 - r^2) \quad (1b)$$

Da bismo odredili pritisak u centru Europe, uzimamo  $r=0$ , što nam daje rješenje:

$$p(0) = \frac{2}{3} \pi \gamma \rho^2 R^2 \quad (1b)$$

b)

Uprkos udaljenosti Europe od Sunca, njeni oceani se ne mogu u potpunosti zamrznuti zbog gravitacionog privlačenja Jupitera, koji stvara toplotu unutar ovog satelita. Toplota se proizvodi procesom plimskog zagrijavanja, a nastaje kada gravitaciona sila sa Jupitera uzrokuje deformaciju (stvaranje ispupčenja na površini Europe), savijanje i istežanje, odnosno plimu i oseku. Ovo savijanje stvara trenje i toplinu, što pomaže da se oceani ne zamrznju. Ova toplota je dovoljna za održavanje podzemnog oceana u tečnom stanju, uprkos ekstremno niskim temperaturama na površini Europe. Pored toga, ledeni omotač koji pokriva Europu djeluje kao izolator, zadržavajući toplinu koju stvaraju plimne sile, što pomaže u održavanju stabilnog temperaturnog gradijenta unutar satelita, što dodatno podržava postojanje oceana tečne vode ispod ledenog omotača. **(3b)**

c)

Korištenjem zakona očuvanja momente impulsa, možemo napisati:

$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2 \quad \mathbf{(2b)}$$

gdje se indeks 1 odnosi na Europu od vode, a indeks 2 na Europu od leda. Nova ugaona brzina je:

$$\omega_2 = \frac{I_1}{I_2}\omega_1$$

Trajanje dana na satelitu obrnuto je proporcionalno ugaonoj brzini, stoga:

$$T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = \frac{2\pi}{\frac{I_1}{I_2}\omega_1} = \frac{I_2}{I_1}T_1 \quad \mathbf{(1b)}$$

Razlika u trajanju dana (za koliko se trajanje dana promjeni) je:

$$\Delta T = T_2 - T_1 = \frac{I_2}{I_1}T_1 - T_1 = \left(\frac{I_2}{I_1} - 1\right)T_1 \quad \mathbf{(1b)}$$

Potrebno je još odrediti odnos momenata inercije. Budući da su gustine vode i leda različite, jasno je da će se promijeniti zapremina satelita (s obzirom da masa mora ostati konstantna). Prema tome:

$$m_1 = m_2 = m, \quad \rho_1 V_1 = \rho_2 V_2$$

Odnosno,

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{V_2}{V_1} = \frac{R_2^3}{R_1^3} \quad \mathbf{(1b)}$$

Osim toga, moment inercije za ovaj satelit je:

$$I_1 = kmR_1^2 = k'mV_1^{\frac{2}{3}}$$

$$I_2 = kmR_2^2 = k'mV_2^{\frac{2}{3}} \quad \mathbf{(1b)}$$

Prema tome,

$$\Delta T = \left(\frac{I_2}{I_1} - 1\right) T_1 = \left(\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\frac{2}{3}} - 1\right) T_1 = \left(\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^{\frac{2}{3}} - 1\right) T_1 = \left(\left(\frac{1}{0.916}\right)^{\frac{2}{3}} - 1\right) T_1 \quad (2b)$$

Konačno, imamo:

$$\Delta T = 0.06024 T_1 \quad (1b)$$

Odnosno, dan bi se povećao za:

$$\Delta T = 5.132h \quad (1b)$$

#### Rješenje 4:

Jednačina stanja idealnog gasa za gornji i donji dio cilindra je

$$p_1 V_1 = nRT, \quad (p_1 + p_K) V_2 = nRT, \quad (2+3b)$$

gdje je  $n = 1$  mol. Dijeleći ove jednačine i uvažavajući da na temperaturi  $T$  vrijedi  $V_2 = V_1/\eta$  za pritisak klipa dobijamo

$$p_K = p_1(\eta - 1). \quad (1) \quad (3b)$$

Na novoj temperaturi  $T'$ , kada je  $V_2' = V_1'/\eta'$ , pritisak klipa je nepromijenjen

$$p_K = p_1'(\eta' - 1). \quad (2) \quad (5b)$$

Obzirom da se broj molova u gornjem i donjem dijelu cilindra ne mijenja pri promjeni temperature, jednačina stanja idealnog gasa vodi na

$$\frac{p_1 V_1}{T} = \frac{p_1' V_1'}{T'} \Rightarrow T' = T \frac{p_1' V_1'}{p_1 V_1}. \quad (3) \quad (3b)$$

Da bi odredili novu temperaturu  $T'$  trebaju nam odnosi  $p_1'/p_1$  i  $V_1'/V_1$ . Iz jednačina (1) i (2) lako dobijamo

$$\frac{p_1'}{p_1} = \frac{\eta - 1}{\eta' - 1} \quad (4) \quad (2b)$$

Ukoliko sa  $V$  označimo ukupnu zapreminu cilindra, možemo pisati

$$V = V_1 + \frac{V_1}{\eta} = V_1' + \frac{V_1'}{\eta'}$$

odakle nalazimo

$$\frac{V_1'}{V_1} = \frac{\eta'(1+\eta)}{\eta(1+\eta')} \quad (5) \quad (4b)$$

Koristeći (4) i (5) temperaturu  $T'$  nalazimo iz (3)

$$T' = T \frac{\eta - 1}{\eta' - 1} \frac{\eta'(1 + \eta)}{\eta(1 + \eta')} = 300 \text{ K}$$

# XXVII Federalno takmičenje iz fizike za učenike srednjih škola

## Grupa B - Elektromagnetizam, oscilacije i talasi

Prirodno-matematički fakultet Sarajevo, 15. april 2023.

1. Sonar je uređaj koji koristi ultrazvučne valove za otkrivanje objekata u vodi i obično se nalazi na dnu broda. Šalje kratke pulsirajuće zvučne valove u vodu, a zatim detektuje odraz (ekho) tih valova od objekata u vodi koje dalje analizira da bi odredio udaljenost, veličinu i oblik objekta. Istraživački brod usidern je u moru sa sonarom koji koristi ultrazvučne valove frekvencije od 100 kHz. Brzina zvuka u vodi je 1500 m/s.

- Koja je minimalna frekvencija zvuka za koju možemo reći da je ultrazvuk?
- Koja je minimalna dužina ribe koju sonar može detektovati?
- Na kojoj udaljenosti se riba nalazi ako sonar detektuje odraz ultrazvučnog vala nakon 0,1 sekunde?
- Koliku frekvenciju detektuje sonar ako se ultrazvuk odbio od ribu koja vertikalno zaranja brzinom 10 cm/s ?

2. Četiri provodnika otpora 1  $\Omega$  , 2  $\Omega$  , 3  $\Omega$  i 4  $\Omega$  spojena su tako da je njihov ukupni otpor 1  $\Omega$ .

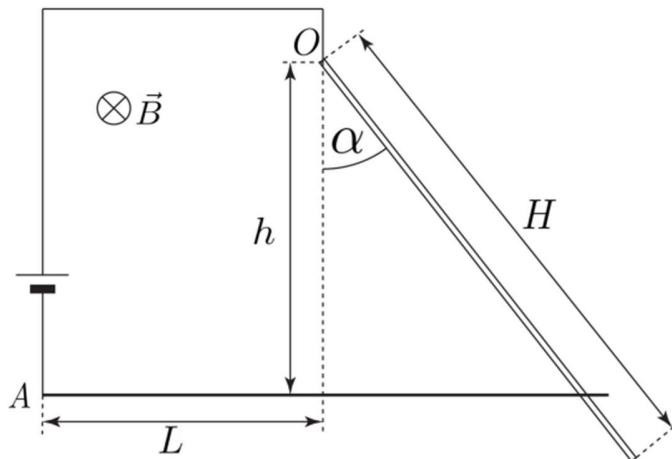
- Nacrtati shematski prikaz ove veze.
- Ako se ova veza spoji na izvor istosmjerne struje, kolika je snaga struje u provodniku otpora 2  $\Omega$  ako provodnikom otpora 3  $\Omega$  teče struja jačine 3 A?

3. Čestica mase  $m=1,89 \cdot 10^{-16}$  kg sa pozitivnim naelektrisanjem  $q=1,83 \cdot 10^{-9}$  C ulijeće u kondenzator kroz donju, negativno naelektrisanu, ploču pod uglom  $20^\circ$  u odnosu na ploču, početnom brzinom  $v_0=7,43 \cdot 10^4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ , na udaljenosti 5 cm od početka ploče. Kondenzator je vertikalno podjeljen na dvije sredine: vazduh i dielektrik relativne dielektrične permitivnosti  $\epsilon_r=2$ . Dielektrik se nalazi na udaljenosti 8,9 cm od početka ploče. Čestica dostiže svoju maksimalnu visinu na ulazu u dielektrik. Ploče kondenzatora su kvadratnog oblika stranica  $b=20$  cm. Udaljenost između ploča je 14,5 mm. Ploče su naelektrisane jednakim naelektrisanjem  $Q=2 \cdot 10^{-9}$  C i unutar vazdušnog dijela kondenzatora postoji homogeno električno polje jačine  $E=4998,68 \frac{\text{N}}{\text{C}}$ .

- Koliko je potrebno čestici da ponovno udari o donju ploču? Nacrtati odgovarajuću sliku. Na kojoj udaljenosti će čestica pasti u odnosu na desni kraj ploče kondenzatora?
- Koliki je ukupni kapacitet posmatranog kondenzatora? Izračunati napon na kondenzatoru?

NAPOMENA:  $\epsilon_r$  za vazduh uzeti približno  $\epsilon_r=1$ , a za  $\epsilon_0 = 8,85 * 10^{-12} \frac{F}{m}$ . Zadatak pod b) može se uraditi neovisno od zadatka pod a).

4. Homogeni metalni štap mase  $m = 1 \text{ kg}$  i dužine  $H = 0,74 \text{ m}$  obješen je jednim krajem o tačku O tako da oko nje može slobodno da rotira u ravni crteža. Štap dodiruje žicu čija otpornost po jedinici dužine iznosi  $r = 1 \Omega/m$  i koja je postavljena na udaljenosti  $h = 0,5 \text{ m}$  od tačke O. Početak žice A nalazi se na  $L = 1 \text{ m}$  od tačke dodira žice i štapa kada je štap postavljen u vertikalni položaj. Sistem se nalazi u homogenom magnetnom polju indukcije  $B = 1 \text{ T}$  čiji je pravac normalan na ravan crteža. Zanemariti sve otpornosti u kolu osim otpornosti pomenute horizontalne žice. Svi dijelovi kola, osim štapa, su fiksirani. Smatrati da Amperova sila djeluje u tački koja se nalazi na sredini dijela štapa kroz koji teče struja. Zanemariti međusobnu interakciju provodnika. Odrediti elektromotornu silu baterije ako štap otklonjen za ugao  $\alpha = 30^\circ$  od vertikale ostaje u tom položaju (slika).



Vrijeme predviđeno za izradu zadataka je 180 minuta. Dozvoljena je upotreba pribora za crtanje i pisanje, kao i kalkulatora.

**ŽELIMO VAM MNOGO ZNANJA I USPJEHA!**

# XXVII Federalno takmičenje iz fizike za učenike srednjih škola

## Grupa B - Elektromagnetizam, oscilacije i talasi

Prirodno-matematički fakultet Sarajevo, 15. april 2023.

### Rješenja

1. Sonar je uređaj koji koristi ultrazvučne valove za otkrivanje objekata u vodi i obično se nalazi na dnu broda. Šalje kratke pulsirajuće zvučne valove u vodu, a zatim detektuje odraz (ekho) tih valova od objekata u vodi koje dalje analizira da bi odredio udaljenost, veličinu i oblik objekta. Istraživački brod usidern je u moru sa sonarom koji koristi ultrazvučne valove frekvencije od 100 kHz. Brzina zvuka u vodi je 1500 m/s.

- e) Koja je minimalna frekvencija zvuka za koju možemo reći da je ultrazvuk?
- f) Koja je minimalna dužina ribe koju sonar može detektovati?
- g) Na kojoj udaljenosti se riba nalazi ako sonar detektuje odraz ultrazvučnog vala nakon 0,1 sekunde?
- h) Koliku frekvenciju detektuje sonar ako se ultrazvuk odbio od ribu koja vertikalno zaranja brzinom 10 cm/s ?

#### Rješenje:

a) Donja granica ultrazvuka je 20 kHz. (2)

b) Minimalna dužina ribe koju sonar može detektovati odgovara talasnoj dužini ultrazvučnog vala i može se izračunati prema formuli:

$$\lambda = \frac{v}{f} = 0,015 \text{ m} = 1,5 \text{ cm.} \quad (3)$$

Dakle, minimalna dužina ribe koju sonar može detektovati je oko 1,5 cm.

c) U našem slučaju, brzina zvuka u slanoj vodi je 1500 m/s, a vrijeme koje je potrebno da se ultrazvučni val vrati natrag do sonara iznosi 0,1 s. Stoga je udaljenost:

$$d = \frac{v \times t}{2} = 75 \text{ m.} \quad (3)$$

d) Najprije ćemo izračunati frekvenciju zvuka koji se odbije od ribu,  $f_r$ , po formuli za Dopplerov efekat kad se prijemnik udaljava od izvora:



$$f_r = \frac{v - v_r}{v} f = 99993,33 \text{ Hz}, \quad (6)$$

gdje je  $f$  frekvencija sonara, a  $v_r$  brzina ribe.

Sada riba postaje izvor talasa, a frekvenciju koju brod detektuje računa se prema

$$f_b = \frac{v}{v + v_r} f_r = 99986,66 \text{ Hz}. \quad (6)$$

**SUM: 20**

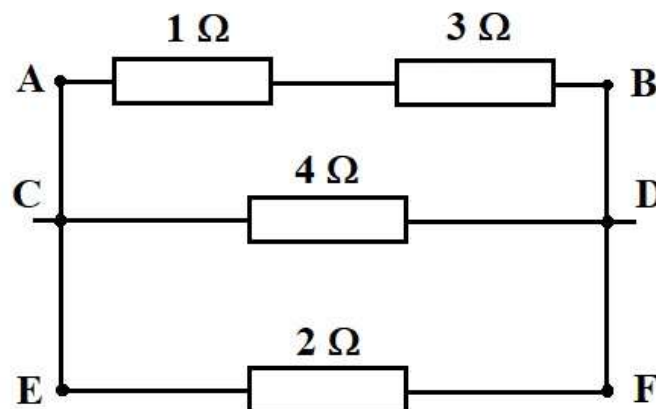
2. Četiri provodnika otpora  $1 \Omega$ ,  $2 \Omega$ ,  $3 \Omega$  i  $4 \Omega$  spojena su tako da je njihov ukupni otpor  $1 \Omega$ .

c) Nacrtati shematski prikaz ove veze.

d) Ako se ova veza spoji na izvor istosmjernje struje, kolika je snaga struje u provodniku otpora  $2 \Omega$  ako provodnikom otpora  $3 \Omega$  teče struja jačine  $3 \text{ A}$ ?

**Rješenje:**

- a) Paralelna veza između provodnika od  $2 \Omega$ , provodnika od  $4 \Omega$  i serijske veze provodnika od  $1 \Omega$  i  $3 \Omega$  će dati ukupni otpor od  $1 \Omega$ . (slika)



$$\frac{1}{R_e} = \frac{1}{1 \Omega + 3 \Omega} + \frac{1}{2 \Omega} + \frac{1}{4 \Omega} \Rightarrow R_e = 1 \Omega \quad (10)$$

- b) Ako provodnikom otpora  $3 \Omega$  teče struja jačine  $3 \text{ A}$ , znači da ista struja teče i kroz provodnik  $1 \Omega$ , pa će razlika potencijala između tačaka A i B biti:

$$U_{AB} = 3 \text{ A} (1 \Omega + 3 \Omega) = 12 \text{ V}. \quad (5)$$

Pošto se radi o paralelnoj vezi, vrijedi:

$$U_{AB} = U_{CD} = U_{ED}. \quad (1)$$

Snaga struje u provodniku otpora  $2 \Omega$  je:

$$P = UI = \frac{U^2}{R} = \frac{U_{EF}^2}{2 \Omega} = \frac{(12 \text{ V})^2}{2 \Omega} = 72 \text{ W.} \quad (4)$$

**SUM: 20**

3. Čestica mase  $m=1,89 \cdot 10^{-1} \text{ kg}$  sa pozitivnim naelektrisanjem  $q=1,83 \cdot 10^{-9} \text{ C}$  ulijeće u kondenzator kroz donju, negativno naelektrisanu, ploču pod uglom  $20^\circ$  u odnosu na ploču, početnom brzinom  $v_0=7,43 \cdot 10^4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ , na udaljenosti 5 cm od početka ploče. Kondenzator je vertikalno podjeljen na dvije sredine: vazduh i dielektrik relativne dielektrične permitivnosti  $\epsilon_r=2$ . Dielektrik se nalazi na udaljenosti 8,9 cm od početka ploče. Čestica dostiže svoju maksimalnu visinu na ulazu u dielektrik. Ploče kondenzatora su kvadratnog oblika stranica  $b=20 \text{ cm}$ . Udaljenost između ploča je 14,5 mm. Ploče su naelektrisane jednakim naelektrisanjem  $Q=2 \cdot 10^{-9} \text{ C}$  i unutar vazdušnog dijela kondenzatora postoji homogeno električno polje jačine  $E=4998,68 \frac{\text{N}}{\text{C}}$ .

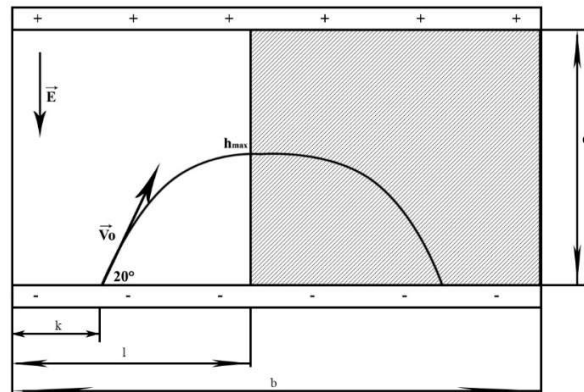
- c) Koliko je potrebno čestici da ponovno udari o donju ploču? Nacrtati odgovarajuću sliku. Na kojoj udaljenosti će čestica pasti u odnosu na desni kraj ploče kondenzatora?
- d) Koliki je ukupni kapacitet posmatranog kondenzatora? Izračunati napon na kondenzatoru?

NAPOMENA:  $\epsilon_r$  za vazduh uzeti približno  $\epsilon_r=1$ , a za  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{F}}{\text{m}}$ . Zadatak pod b) može se uraditi neovisno od zadatka pod a).

**Rješenje:**

Na osnovu teksta crtamo sljedeću sliku:

**(2)**



- a) Kretanje je potrebno podijeliti na dva dijela, kada se čestica kreće kroz vazduh i kroz dielektrik. (0,5)

Primjećujemo da se za prvi dio kretanja radi o kosom hicu:

$$x = v_0 \cos(\alpha)t, \quad (0,5)$$

$$y = v_0 \sin(\alpha)t - \frac{at^2}{2}. \quad (0,5)$$

Sa slike se vidi da je udaljenost koju čestica pređe dok se nalazi u zraku:

$$x = l - k. \quad (0,5)$$

Vrijeme prolaska kroz zrak računamo kao:

$$t = \frac{l - k}{v_0 \cos \alpha} = 5 \cdot 10^{-7} \text{ s}. \quad (1)$$

Na česticu u polju  $E$  djeluje sila gravitacije (koju u dobroj aproksimaciji možemo zanemariti) i električna sila. Pa iz II Newtonovog zakona slijedi:

$$ma = mg + qE \rightarrow a = g + \frac{qE}{m} = 4,83 \cdot 10^{10} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}. \quad (3)$$

Da bi ispitali kretanje čestice u dielektriku potrebno nam je još informacija o kretanju čestice u vazduhu.

$$v_x = v_0 \cos(\alpha) = \text{const} = 70046 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \quad (0,5)$$

$$v_y = v_0 \sin(\alpha) - at.$$

U zadatku je naglašeno da čestica ulijeće u dielektrik na maksimalnoj visini putanje.  $h_{max}$  računamo po formuli:

$$h_{max} = \frac{v_0^2 (\sin \alpha)^2}{2a} = 0,0066 \text{ m} = 0,007 \text{ m}. \quad (1)$$

Drugi dio kretanja je kroz dielektrik. Jasno je da se radi o horizontalnom hicu jer kada čestica dostigne  $h_{max}$ :  $v_y=0$ , a  $v_x=\text{const}$ . (2)

Kretanje kroz dielektrik po  $y$  osi se odvija po formuli:

$$h_{max} = \frac{a_1 t_1^2}{2}. \quad (0,5)$$

Pošto se čestica nalazi u dielektriku električno polje  $E_1$  možemo izraziti preko električnog polja  $E$  u vazduhu kao:

$$E_1 = \frac{E}{\epsilon_r} = 2499,34 \frac{\text{N}}{\text{C}}, \quad (3)$$

pa se i izraz za ubrzanje modifikuje:

$$a_1 = g + \frac{qE_1}{m} = 2,42 \cdot 10^{10} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}. \quad (1)$$

Dobijamo vrijeme padanja kroz dielektrik kao:

$$t_1 = \sqrt{\frac{2h_{max}}{a_1}} = 7,04 \cdot 10^{-7} \text{s}. \quad (2)$$

Domet čestice kroz dielektrik računamo kao:

$$x_1 = v_x t_1 = 4,9 \text{ cm}. \quad (0,5)$$

Ukupni domet računamo kao

$$x_d = x_1 + x = 8,8 \text{ cm}. \quad (0,5)$$

Udaljenost od desnog kraja kondenzatora označit ćemo sa  $z$ :

$$z = b - x_d - k = 6,2 \text{ cm}. \quad (0,5)$$

Ukupno vrijeme padanja je:

$$t_u = t + t_1 = 12,17 \cdot 10^{-7} \text{s}. \quad (0,5)$$

- b) Kapacitet kondenzatora računamo kao ukupni kapacitet dva kondenzatora kapaciteta  $C_1$  i  $C$  vezanih paralelno. (3)

$$C = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{S}{d}. \quad (1)$$

gdje je  $S = lb$ ,

pa slijedi da je  $C = 11,3 \text{ pF}$ . (1)

$$C_1 = \epsilon_0 \epsilon_{r1} \frac{S_1}{d},$$

gdje je  $S_1 = (b - l)b$ , (1)

pa je  $C_1 = 27,9 \text{ pF}$ . (1)

Ukupan kapacitet paralelno vezanih kondenzatora računamo po formuli:

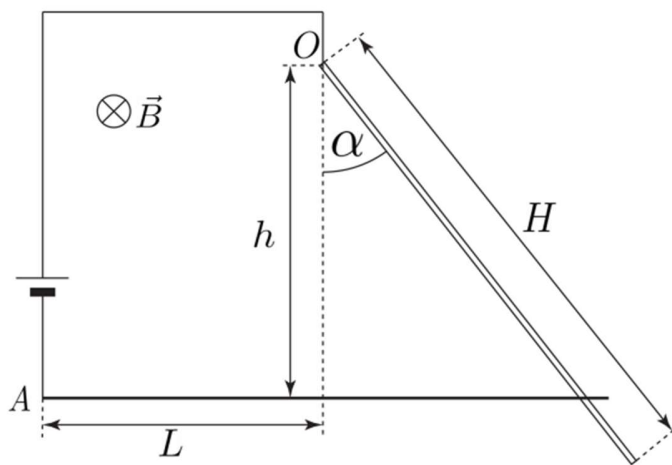
$$C_u = C + C_1 = 39,1 \text{ pF}. \quad (1,5)$$

Napon kondenzatora računamo je:

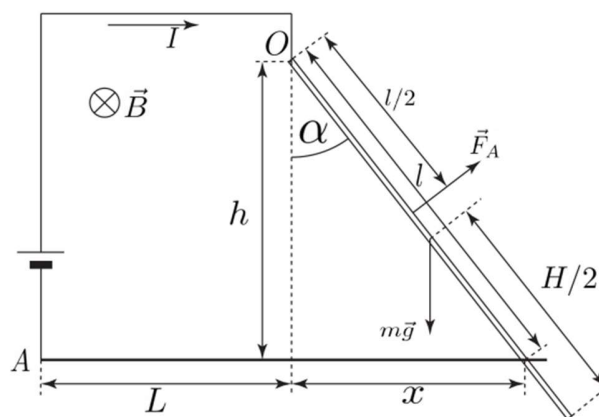
$$U = \frac{Q}{C_u} = 51,1 \text{ V}. \quad (1,5)$$

**SUM: 30**

4. Homogeni metalni štap mase  $m = 1 \text{ kg}$  i dužine  $H = 0,74 \text{ m}$  obješen je jednim krajem o tačku  $O$  tako da oko nje može slobodno da rotira u ravni crteža. Štap dodiruje žicu čija otpornost po jedinici dužine iznosi  $r = 1 \Omega/\text{m}$  i koja je postavljena na udaljenosti  $h = 0,5 \text{ m}$  od tačke  $O$ . Početak žice  $A$  nalazi se na  $L = 1 \text{ m}$  od tačke dodira žice i štapa kada je štap postavljen u vertikalni položaj. Sistem se nalazi u homogenom magnetnom polju indukcije  $B = 1 \text{ T}$  čiji je pravac normalan na ravan crteža. Zanimariti sve otpornosti u kolu osim otpornosti pomenute horizontalne žice. Svi dijelovi kola, osim štapa, su fiksirani. Smatrati da Amperova sila djeluje u tački koja se nalazi na sredini dijela štapa kroz koji teče struja. Zanimariti međusobnu interakciju provodnika. Odrediti elektromotornu silu baterije ako štap otklonjen za ugao  $\alpha = 30^\circ$  od vertikale ostaje u tom položaju (slika).



**Rješenje:**



Otpornost dijela žice kroz koji protiče struja iznosi:

$$R = r(L + x) = r(L + h \tan \alpha), \quad (3)$$

pa prema Ohmovom zakonu kroz štap protiče struja:

$$I = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{\varepsilon}{r(L + h \tan \alpha)}. \quad (3)$$

Dužina dijela štapa kroz koji protiče struja je:

$$l = \sqrt{h^2 + x^2} = h \sqrt{1 + \tan^2 \alpha} \quad (4)$$

Intenzitet Amperove sile koja djeluje na štap je

$$F_A = IlB = \frac{h\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}{r(L + h \tan \alpha)} \varepsilon B. \quad (3)$$

Da bi štap bio u ravnoteži moment sile Zemljine teže i moment Amperove sile treba da budu jednaki:

$$M_1 = M_2 \quad (4)$$

$$M_1 = mg \frac{H}{2} \sin \alpha \quad (4)$$

$$M_2 = F_A \frac{l}{2} = \frac{Il^2 B}{2} = \frac{h^2 \varepsilon B (1 + \tan^2 \alpha)}{2r(L + h \tan \alpha)} \quad (4)$$

Tražena elektromotorna sila je:

$$\varepsilon = \frac{mgHr(L + h \tan \alpha) \sin \alpha}{h^2 B (1 + \tan^2 \alpha)}, \quad (3)$$

$$\varepsilon \approx 14 \text{ V}. \quad (2)$$

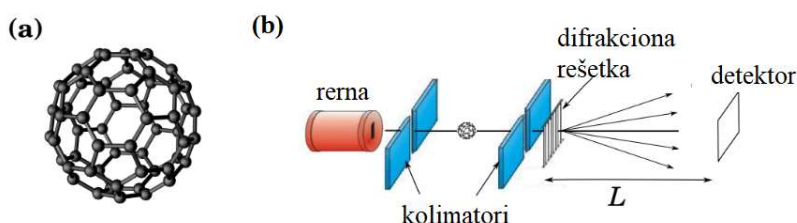
**SUM: 30**

## XXVII Federalno takmičenje iz fizike za učenike srednjih škola

Prirodno-matematički fakultet Sarajevo, 15.4.2023. godine

### GRUPA C – OPTIKA, ATOMSKA I NUKLEARNA FIZIKA

1. Jedan od najvećih objekata na kojima je eksperimentalno potvrđena De Broglijeva hipoteza o dualnoj prirodi materije je molekula fullerena  $C_{60}$  koja se sastoji od 60 ugljikovih atoma raspoređenih u strukturu nalik na fudbalsku loptu (slika 1a). U bečkom eksperimentu iz 1999. godine (slika 1b), kolimisani snop molekula fullerena brzine  $v = 200 \text{ m/s}$  usmjeren je okomito na difrakcionu rešetku konstante  $d = 0.10 \mu\text{m}$ . Detektor na kojem je posmatrana difrakciona slika nalazio se na rastojanju  $L = 1.25 \text{ m}$  od difrakcione rešetke.



Slika 1. (a) Molekula fullerena b) Principijelna šema eksperimenta difrakcije molekule fullerena.

- a) i) Dokazati da se rastojanje (u pravcu okomitom na pravac upadnog snopa) između susjednih difrakcionih maksimuma na detektoru može računati po relaciji:

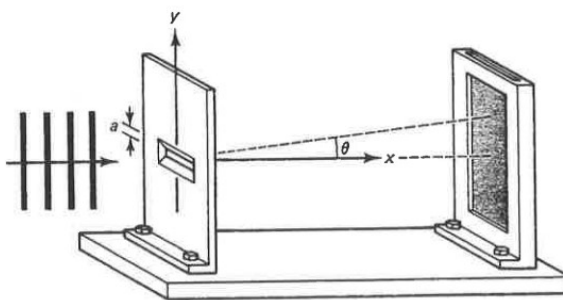
$$\Delta x = \frac{L \cdot h}{d \cdot m \cdot v}.$$

- ii) Izračunati  $\Delta x$ .

Možete koristiti aproksimaciju  $\sin x \approx \text{tg} x \approx x$  za  $|x| \ll 1$ . Relativna atomska masa atoma ugljika je 12.

**(15 bodova)**

- b) Difrakciona slika na ekranu/detektoru potvrđuje talasna svojstva čestica. Posmatrajmo difrakciju čestica kroz samo kroz jednu pukotinu u pravcu x-ose, slično kao na slici 2:



Slika 2. Određivanje vertikalnog položaja čestica pomoću horizontalne pukotine

Dokaži da vrijedi Heisenbergova relacija neodređenosti u vertikalnom pravcu:

$$\Delta y \cdot \Delta p_y \geq \frac{\hbar}{2}$$

(10 bodova)

Konstante za 1. zadatak:  $h = 6.626 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$ ,  $u = 1.66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$

2. Stanja atoma sa velikim glavnim kvantnim brojem se nazivaju Rydbergova stanja. Kada se atomi vodika pobude u ova stanja monoenergetskim mlazom elektrona, tada intenzitet svjetlosti koja se emituje prilikom njihove relaksacije pulsira sa osnovnom frekvencijom  $\nu_0 = 243.6 \text{ MHz}$ . Procijeniti do kojeg glavnog kvantnog broja su pobuđeni atomi vodika i kolika je energija elektrona (u  $eV$ ) u pobudnom snopu. Potrebne konstante:  $R = 1.097 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$ ,  $c = 2.998 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ,  $e = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ ,  $h = 6.626 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$ .

(25 bodova)

3. Ekstrasolarne planete ili egzoplanete su planete izvan Sunčevog sistema. U većini slučajeva ih je nemoguće vidjeti ni najboljim teleskopima (predaleko su i svjetlost matične zvijezde ih potpuno zasjeni), ali ipak se, koristeći zakone fizike, mogu detektovati. Prva egzoplaneta je detektovana prije 30-ak godina, a do danas ih je pronađeno preko 5000.

U ovom zadatku proučavamo egzoplanete koje kruže oko zvijezde TOI-700, udaljene oko 100 svjetlosnih godina od Sunčevog sistema. Zvijezda TOI-700 je crveni patuljak poluprečnika  $R = 2.922 \cdot 10^5 \text{ km}$ . U dobroj aproksimaciji, ovu zvijezdu možemo analizirati kao apsolutno crno tijelo za koje je maksimum emisije moći na talasnoj dužini  $\lambda_m = 832.8 \text{ nm}$ .

- a) Koristeći Vinov zakon, odrediti površinsku temperaturu zvijezde.  
b) Koristeći Štefan-Bolcmanov zakon, izračunati snagu zračenja sa zvijezde.

Oko zvijezde TOI-700 kruže 4 planete. Apsorbirajući zračenje matične zvijezde, temperatura planete raste. S druge strane, planeta sama zrači kao apsolutno crno tijelo. U ravnotežnom stanju, temperatura planete će dostići konstantnu vrijednost. Pretpostaviti da je efektivna površina planete prilikom pada zračenja sa zvijezde na nju krug i da planeta apsorbuje svo zračenje koje na nju padne.

- c) Dokazati da za ravnotežnu temperaturu planete vrijedi

$$T_P = T \cdot \sqrt{\frac{R}{2d}}$$

gdje je  $T$  površinska temperatura zvijezde,  $R$  poluprečnik zvijezde, a  $d$  udaljenost između zvijezde i planete.

- d) Koristeći formulu iz dijela c), izračunati ravnotežne temperature (u K i  $^{\circ}\text{C}$ ) za najbližu (TOI-700b) i najdalju (TOI-700d) planetu. Udaljenost planete TOI-700b od matične zvijezde je  $1.0128 \cdot 10^{10} \text{ m}$ , a udaljenost planete TOI-700d od matične zvijezde  $2.443 \cdot 10^{10} \text{ m}$ . Na kojoj planeti je, po ovom proračunu, veća šansa za postojanje života sličnog životu na Zemlji?

Napomena: navedena procedura daje prvu procjenu temperature planete. Zanimareni su koeficijent refleksije zračenja sa planete, rotacija planete, postojanje atmosfere i efekta staklenika,



postojanje radioaktivnih izvora toplote unutar planete, pa konačni rezultat može značajno varirati u odnosu na prvu procjenu.

Vinova konstanta je  $b = 2.898 \cdot 10^{-3} \text{ K} \cdot \text{m}$ , a Štefan-Bolcmanova  $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}^4}$ .

**(25 bodova)**

4. Proton ukupne energije  $E$  elastično se sudara sa drugim protonom u mirovanju (u odnosu na laboratorijski sistem). Nakon sudara dva protona se rasprše simetrično pod uglom  $\pm \frac{\varphi}{2}$  u odnosu na početni pravac kretanja protona. Razmatrajući kretanje u odnosu na laboratorijski sistem, potrebno je dokazati da vrijedi

$$\cos\varphi = \frac{E - E_0}{E + 3E_0},$$

pri čemu je  $E_0$  energija mirovanja protona.

Koja je vrijednost ugla  $\varphi$  kada se prvi proton ubrza iz stanja mirovanja razlikom potencijala od  $1.5 \cdot 10^9 \text{ V}$  prije sudara sa drugim protonom?

Potrebne konstante:  $e = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ ,  $m_p = 1.67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ ,  $c = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ .

**(25 bodova)**

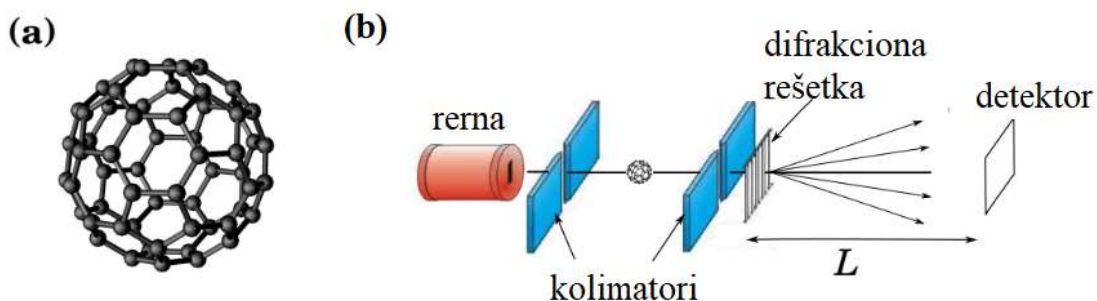
## XXVII Federalno takmičenje iz fizike za učenike srednjih škola

Prirodno-matematički fakultet Sarajevo, 15.4.2023. godine

### GRUPA C – OPTIKA, ATOMSKA I NUKLEARNA FIZIKA

Rješenja i smjernice za bodovanje

1. Jedan od najvećih objekata na kojima je eksperimentalno potvrđena De Broglijeva hipoteza o dualnoj prirodi materije je molekula fullerena  $C_{60}$  koja se sastoji od 60 ugljikovih atoma raspoređenih u strukturu nalik na fudbalsku loptu (slika 1a). U bečkom eksperimentu iz 1999. godine (slika 1b), kolimisani snop molekula fullerena brzine  $v = 200 \text{ m/s}$  usmjeren je okomito na difrakcionu rešetku konstante  $d = 0.10 \mu\text{m}$ . Detektor na kojem je posmatrana difrakciona slika nalazio se na rastojanju  $L = 1.25 \text{ m}$  od difrakcione rešetke.



Slika 1. (a) Molekula fullerena b) Principijelna šema eksperimenta difrakcije molekule fullerena.

- c) i) Dokazati da se rastojanje (u pravcu okomitom na pravac upadnog snopa) između susjednih difrakcionih maksimuma na detektoru može računati po relaciji:

$$\Delta x = \frac{L \cdot h}{d \cdot m \cdot v}$$

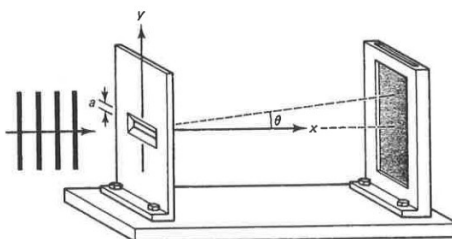
- ii) Izračunati  $\Delta x$ .

Možete koristiti aproksimaciju  $\sin x \approx \text{tg} x \approx x$  za  $|x| \ll 1$ . Relativna atomska masa atoma ugljika je 12.

$$\text{Konstante: } h = 6.626 \cdot 10^{-34} \text{ Js, } u = 1.66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

(15 bodova)

- d) Difrakciona slika na ekranu/detektoru potvrđuje talasna svojstva čestica. Posmatrajmo difrakciju čestica kroz samo kroz jednu pukotinu u pravcu x-ose, slično kao na slici 2:



Slika 2. Određivanje vertikalnog položaja čestica pomoću horizontalne pukotine

Dokaži da vrijedi Heisenbergova relacija neodređenosti u vertikalnom pravcu:

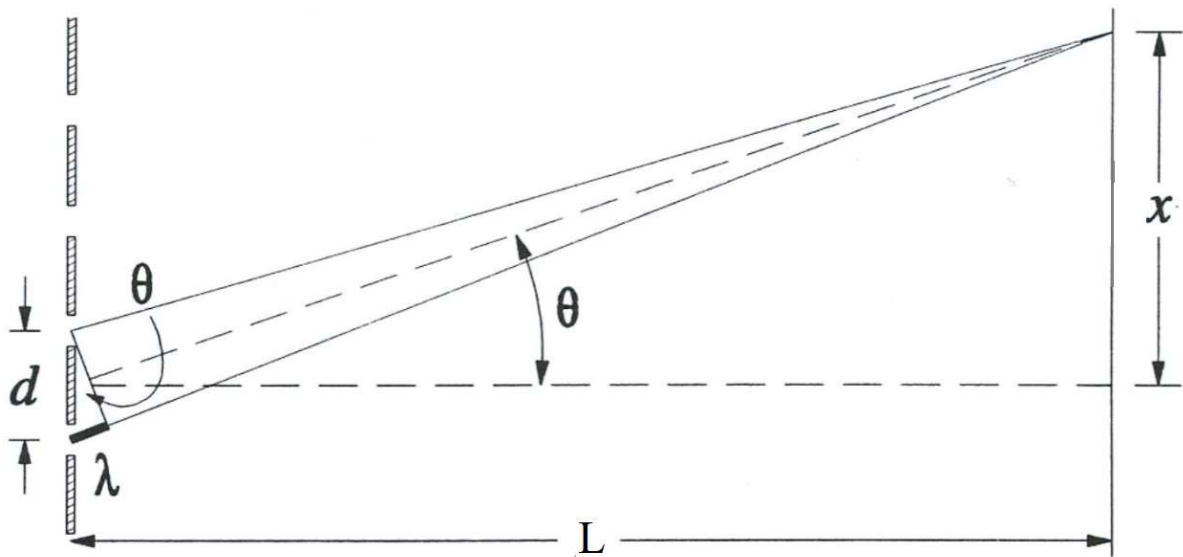
$$\Delta y \cdot \Delta p_y \geq \frac{\hbar}{2}$$

(10 bodova)

Rješenje:

a) i)

difrakciona rešetka



(2b)

De Broglieva talasna dužina molekule fullerena je:

$$\lambda = \frac{h}{mv} \quad (2b)$$

Pri čemu je masa fullerena  $m = 60 \cdot 12u = 720u$ . (1b)

Na slici je predstavljena geometrija eksperimentalne postavke, gdje je  $x$  udaljenost  $k$ -tog maksimuma od pravca upadnog snopa (ili od centralnog maksimuma).

Uslov za  $k$ -ti ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) difrakcioni maksimum je:

$$d \cdot \sin\theta = k \cdot \lambda \quad (2b)$$

Ako iskoristimo datu aproksimaciju ( $\sin x \approx \tan x$ ), sa slike je vidljivo da je:

$$\tan\theta = \frac{x}{L} \quad (2b)$$

Odnosno:

$$d \cdot \frac{x}{L} = k \cdot \lambda$$

Za dva susjedna maksimuma možemo pisati:

$$d \cdot \frac{x_1}{L} = k \cdot \lambda$$

$$d \cdot \frac{x_2}{L} = (k + 1) \cdot \lambda$$

Odakle dobijamo:

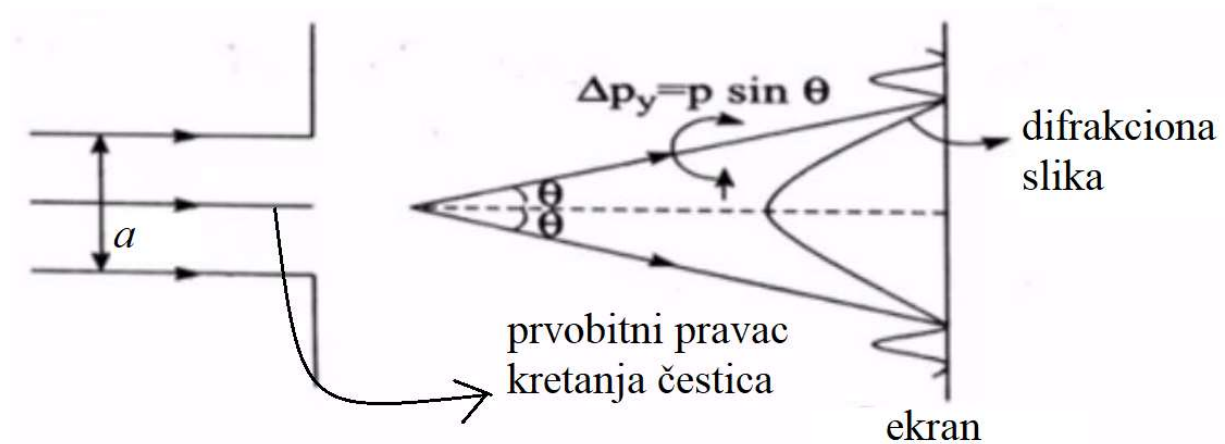
$$\Delta x = x_2 - x_1 = \frac{\lambda \cdot L}{d} \quad (3b)$$

Odnosno, ako uvrstimo Debroglijevu relaciju:

$$\Delta x = \frac{L \cdot h}{d \cdot m \cdot v} \quad (1b)$$

ii)  $\Delta x \approx 35 \mu m$  (2b)

b) Širina pukotine je  $a$ . Tačan položaj gdje čestica prolazi kroz pukotinu je nemoguće odrediti, zbog čega je neodređenost položaja čestice jednaka  $a$ :



$$a = \Delta y \quad (2b)$$

Zbog talasnih osobina čestice, doći će do difrakcije na pukotini, zbog čega čestice skreću sa svog prvobitnog pravca prostiranja. Za difrakciju na jednoj pukotini vrijedi uslov za prvi minimum:

$$a \cdot \sin \theta = \lambda \quad (3b)$$

Vertikalna komponenta impulsa je:

$$\Delta p_y = p \cdot \sin \theta = \frac{h}{\lambda} \cdot \sin \theta = \frac{h}{a} \quad (3b)$$

$$\Delta y \cdot \Delta p_y = a \cdot \frac{h}{a} = h,$$

Što je veće od  $\frac{h}{2}$ , čime je hipoteza potvrđena. (2b)

2. Stanja atoma sa velikim glavnim kvantnim brojem se nazivaju Rydbergova stanja. Kada se atomi vodika pobude u ova stanja monoenergetskim mlazom elektrona, tada intenzitet svjetlosti koja se emituje prilikom njihove relaksacije pulsira sa osnovnom frekvencijom  $\nu_0 = 243.6 \text{ MHz}$ . Procijeniti do kojeg glavnog kvantnog broja su pobuđeni atomi vodika i kolika je energija elektrona (u  $eV$ ) u pobudnom snopu. Potrebne konstante:  $R = 1.097 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$ ,  $c = 2.998 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ,  $e = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ ,  $h = 6.626 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$ .

(25 bodova)

**Rješenje:**

$$\nu_0 = 243.6 \text{ MHz} = 2.436 \cdot 10^8 \text{ Hz}$$

Pri prelazu atoma vodika iz stanja sa većim glavnim kvantnim brojem u stanje sa manjim glavnim kvantnim brojem, emituje se foton čija je frekvencija data sa:

$$\nu = cR \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right)$$

Osnovna frekvencija  $\nu_0$  se javlja za slučaj kada je  $m = n + 1$  i tada imamo:

$$\nu_0 = cR \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \right)$$

$$\nu_0 = cR \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} \quad (5 \text{ bodova})$$

Pošto je  $n$  veliko i u zadatku je navedeno da se uradi procjena, mogu se iskoristiti aproksimacije  $n + 1 \approx n$  i  $2n + 1 \approx 2n$ , čime dobijamo da je:

$$\nu_0 = \frac{2cR}{n^3}$$

Dalje onda imamo:

$$n^3 = \frac{2cR}{\nu_0}$$

$$n = \sqrt[3]{\frac{2cR}{\nu_0}}$$

$$n = \sqrt[3]{\frac{2 \cdot 2.998 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 1.097 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}}{2.436 \cdot 10^8 \text{ Hz}}}$$

$$n = 300$$

(15 bodova)

Energija elektrona u pobudnom snopu je data sa:

$$E = hcR\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2}\right)$$

Atome vodika je potrebno pobuditi iz osnovnog stanja ( $k = 1$ ) u stanje sa kvantnim brojem  $n = 300$ , pa imamo:

$$E = 6.626 \cdot 10^{-34} \text{ Js} \cdot 2.998 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 1.097 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1} \cdot \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{300^2}\right)$$

$$E = 2.179 \cdot 10^{-1} \text{ J}$$

Da bismo dobili vrijednost energije u  $eV$ , potrebno je podijeliti dobijenu vrijednost energije u  $J$  sa brojčanom vrijednošću elementarnog naboja  $e$ , čime konačno imamo:

$$E = 13.6 \text{ eV}$$

(5 bodova)

3. Ekstrasolarne planete ili egzoplanete su planete izvan Sunčevog sistema. U većini slučajeva ih je nemoguće vidjeti ni najboljim teleskopima (predaleko su i svjetlost matične zvijezde ih potpuno zasjeni), ali ipak se, koristeći zakone fizike, mogu detektovati. Prva egzoplaneta je detektovana prije 30-ak godina, a do danas ih je pronađeno preko 5000.

U ovom zadatku proučavamo egzoplanete koje kruže oko zvijezde TOI-700, udaljene oko 100 svjetlosnih godina od Sunčevog sistema. Zvijezda TOI-700 je crveni patuljak poluprečnika  $R = 2.922 \cdot 10^5 \text{ km}$ . U dobroj aproksimaciji, ovu zvijezdu možemo analizirati kao apsolutno crno tijelo za koje je maksimum emisije moći na talasnoj dužini  $\lambda_m = 832.8 \text{ nm}$ .

- e) Koristeći Vinov zakon, odrediti površinsku temperaturu zvijezde.
- f) Koristeći Štefan-Bolcmanov zakon, izračunati snagu zračenja sa zvijezde.

Oko zvijezde TOI-700 kruže 4 planete. Apsorbirajući zračenje matične zvijezde, temperatura planete raste. S druge strane, planeta sama zrači kao apsolutno crno tijelo. U ravnotežnom stanju, temperatura planete će dostići konstantnu vrijednost. Pretpostaviti da je efektivna površina planete prilikom pada zračenja sa zvijezde na nju krug i da planeta apsorbuje svo zračenje koje na nju padne.

- g) Dokazati da za ravnotežnu temperaturu planete vrijedi

$$T_P = T \cdot \sqrt{\frac{R}{2d}}$$

gdje je  $T$  površinska temperatura zvijezde,  $R$  poluprečnik zvijezde, a  $d$  udaljenost između zvijezde i planete.

- h) Koristeći formulu iz dijela c), izračunati ravnotežne temperature (u K i °C) za najbližu

(TOI-700b) i najdalju (TOI-700d) planetu. Udaljenost planete TOI-700b od matične zvijezde je  $1.0128 \cdot 10^{10}$  m, a udaljenost planete TOI-700d od matične zvijezde  $2.443 \cdot 10^{10}$  m. Na kojoj planeti je, po ovom proračunu, veća šansa za postojanje života sličnog životu na Zemlji?

Napomena: navedena procedura daje prvu procjenu temperature planete. Zanimareni su koeficijent refleksije zračenja sa planete, rotacija planete, postojanje atmosfere i efekta staklenika, postojanje radioaktivnih izvora toplote unutar planete, pa konačni rezultat može značajno varirati u odnosu na prvu procjenu.

Vinova konstanta je  $b = 2.898 \cdot 10^{-3} \text{ K} \cdot \text{m}$ , a Štefan-Bolcmanova  $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}^4}$ .

**(25 bodova)**

### **Rješenje:**

Postavka zadatka **(1 bod)**

a) Koristeći Vinov zakon, površinska temperatura zvijezde je

$$T = \frac{b}{\lambda_m}$$

**(1 bod)**

Uvrštavanjem poznate vrijednosti talasne dužine  $\lambda_m$  za koju je intenzitet zračenja maksimalan,

$$T = 3480 \text{ K.}$$

**(1 bod)**

b) Integralna emisiona moć zvijezde je data Štefan-Bolcmanovim zakonom

$$I = \sigma T^4.$$

**(1 bod)**

Snaga zračenja sa zvijezde je

$$P = I \cdot S.$$

**(1 bod)**

Površina zvijezde je

$$S = 4R^2\pi.$$

**(1 bod)**

Slijedi da je snaga

$$P = \sigma T^4 \cdot 4R^2\pi.$$

Uvrštavanjem poznatih vrijednosti,

$$P = 8.92 \cdot 10^{24} \text{ W.}$$

**(1 bod)**

c) Energija koja u jedinici vremena prolazi kroz sferu radijusa  $d$  je ista energija koja se izrači u jedinici vremena sa površine zvijezde:

$$\sigma T^4 \cdot 4R^2\pi = I' \cdot 4d^2\pi,$$

gdje je  $I'$  intenzitet zračenja na udaljenosti  $d$  od zvijezde.

**(2 boda)**

Pošto je efektivna površina planete krug, snaga zračenja koju apsorbuje planeta je

$$P_1 = I' \cdot r^2\pi.$$

**(2 boda)**

Planeta kao apsolutno crno tijelo zrači izotropno te je snaga zračenja sa planete

$$P_2 = \sigma T_P^4 \cdot 4r^2\pi.$$

**(2 boda)**

Po uslovu zadatka, za ravnotežnu temperaturu vrijedi

$$P_1 = P_2.$$

$$\sigma T^4 \frac{4R^2\pi}{4d^2\pi} r^2\pi = \sigma T_P^4 4r^2\pi.$$

**(3 boda)**

Slijedi da je

$$T_P = T \sqrt{\frac{R}{2d}}.$$

**(3 boda)**

d) Za planetu TOI-700b,

$$T_P = 418 \text{ K,}$$

**(1 bod)**

$$t_P = 144.85 \text{ }^\circ\text{C.}$$

**(1 bod)**

Za planetu TOI-700d,



$$T_p = 269 \text{ K},$$

(1 bod)

$$t_p = -4.15 \text{ }^\circ\text{C}.$$

(1 bod)

Za život sličan onom na Zemlji, neophodno je da je voda na površini u tečnom stanju. Vidimo da je za planetu TOI-700d dobijena ravnotežna temperatura bliža traženom intervalu temperatura (od 0 do 100 stepeni Celzijusa). Uzimajući u obzir da je zbog kombinacije ostalih efekata konačna temperatura često veća od ravnotežne (posebno zbog postojanja atmosfere i efekta staklenika), postoji šansa da temperatura uđe u traženi interval.

(Priznati svaki smisleni odgovor.)

(2 boda)

4. Proton ukupne energije  $E$  elastično se sudara sa drugim protonom u mirovanju (u odnosu na laboratorijski sistem). Nakon sudara dva protona se rasprše simetrično pod uglom  $\pm \frac{\varphi}{2}$  u odnosu na početni pravac kretanja protona. Razmatrajući kretanje u odnosu na laboratorijski sistem, potrebno je dokazati da vrijedi

$$\cos\varphi = \frac{E - E_0}{E + 3E_0},$$

pri čemu je  $E_0$  energija mirovanja protona.

Koja je vrijednost ugla  $\varphi$  kada se prvi proton ubrza iz stanja mirovanja razlikom potencijala od  $1.5 \cdot 10^9 \text{ V}$  prije sudara sa drugim protonom?

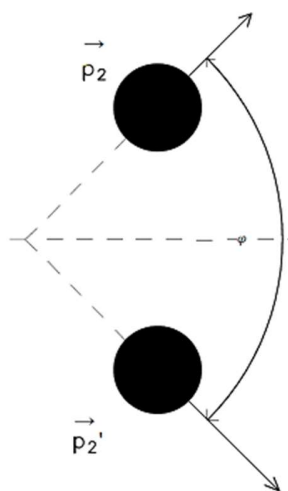
Potrebne konstante:  $e = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ ,  $m_p = 1.67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ ,  $c = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ .

(25 bodova)

### Rješenje

Napomena: Obzirom da energija protona prije sudara iznosi  $1500 \text{ MeV}$ , što je veće od energije mirovanja protona ( $938.21 \text{ MeV}$ ), potrebno je koristiti relativističke zakone.





(a) Prije sudara

(b) Poslije sudara

(c) Trougao impulsa

**(3 boda)**

Iz postavke jednačina za zakon održanja impulsa, te uzimajući u obzir da je intenzitet vektora impulsa protona nakon sudara isti (slika (b)), dobije se veza intenziteta impulsa protona prije i nakon elastičnog sudara:

$$p_1 = 2p_2 \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right).$$

**(3 boda)**

Veza energije  $E$  i impulsa  $p_1$  dobije se iz izraza za totalnu energiju

$$E^2 = p_1^2 c^2 + E_0^2,$$

**(1 bod)**

te se kombinovanjem prethodnih izraza dobije relacija

$$(E^2 - E_0^2) = 4p_2^2 c^2 \cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right).$$

**(1 bod)**

Impuls  $p_2$  se može eliminisati ponovnim korištenjem relacije za vezu energije i impulsa:

$$E_2^2 = p_2^2 c^2 + E_0^2,$$

**(1 bod)**

odakle se dobija izraz

$$E^2 - E_0^2 = 4(E_2^2 - E_0^2) \cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right).$$

(1 bod)

Eliminaciju  $E_2$  je moguće izvršiti primjenom zakona održanja energije:

$$E + E_0 = 2E_2,$$

(2 boda)

odakle se dobije

$$E^2 - E_0^2 = (E^2 - 3E_0^2 + 2EE_0)\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right),$$

(1 bod)

odnosno

$$\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{E^2 - E_0^2}{E^2 - 3E_0^2 + 2EE_0}.$$

(1 bod)

Uzimajući u obzir da vrijedi da je  $\cos\varphi = 2\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) - 1$  (2 boda), dobija se izraz:

$$\begin{aligned}\cos\varphi &= \frac{E^2 + E_0^2 - 2EE_0}{E^2 + 2EE_0 - 3E_0^2} \\ \cos\varphi &= \frac{(E - E_0)^2}{(E - E_0)(E + 3E_0)},\end{aligned}$$

Odakle se u konačnici dobija da vrijedi:

$$\cos\varphi = \frac{E - E_0}{E + 3E_0},$$

(4 boda)

što je bilo potrebno dokazati.

Ako se prvi proton ubrza razlikom potencijala  $V$ , uzimajući u obzir da je kinetička energija protona  $eV$  dobija se izraz:

$$E = E_0 + eV,$$

(2 boda)

odakle se dobija vrijednost odnosa  $E/E_0$ :

$$\frac{E}{E_0} = 1 + \frac{eV}{E_0}$$

$$\frac{E}{E_0} = 1 + \frac{eV}{mc^2} = 1 + \frac{1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 1.5 \cdot 10^9}{1.67 \cdot 10^{-27} \cdot (3 \cdot 10^8)^2}$$

$$\frac{E}{E_0} = 2.60,$$

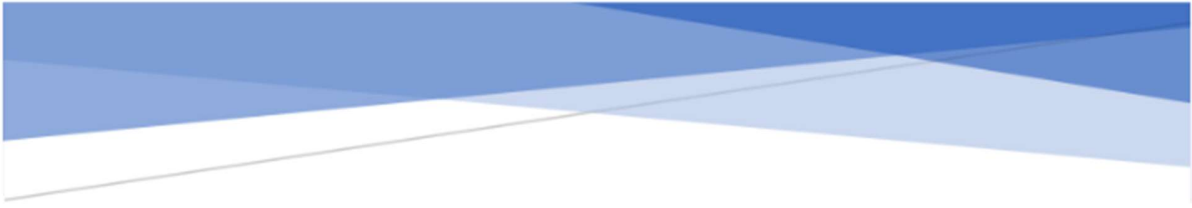
pa je

$$\cos\varphi = \frac{2.60 - 1}{2.60 + 1} = 0.286,$$

a vrijednost ugla

$$\varphi = 73^\circ.$$

**(3 boda)**



XXVII FEDERALNO  
TAKMIČENJE IZ FIZIKE ZA  
UČENIKE SREDNJIH ŠKOLA  
GRUPA D – Cjelokupna fizika

Vrijeme izrade: 240 min / 4 sata  
Za računanje dozvoljena upotreba isključivo kalkulatora!

SRETNO! :-)

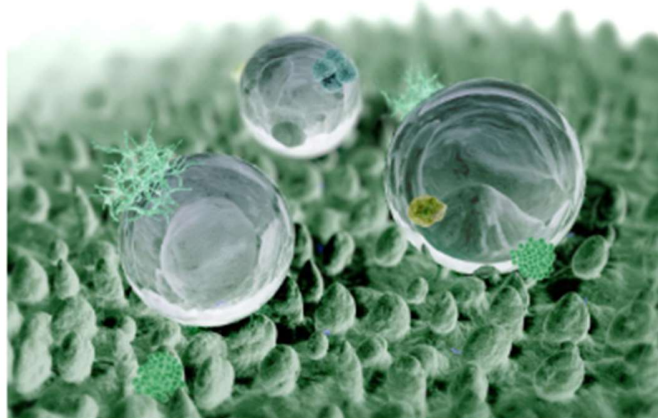
15. April 2023.

### Zadatak 1: Površine gradijenta kvašenja 8.0 [bod]

U malim sistemima je od velike je važnosti usmjereni prijenos kapljica. Međutim, da bi ovakav prijenos bio dalekosežan, obično zahtijeva vanjski unos energije. Međutim, postoji način da se takav prijenos postigne pasivno, uz pomoć takozvanih mikrostrukturnih gradijentnih površina. U ovom zadatku ćemo razmotriti uticaj takvih površina na ugao kvašenja kapljica.

#### Dio A: Mikrostrukturne površine [4.2 bod]

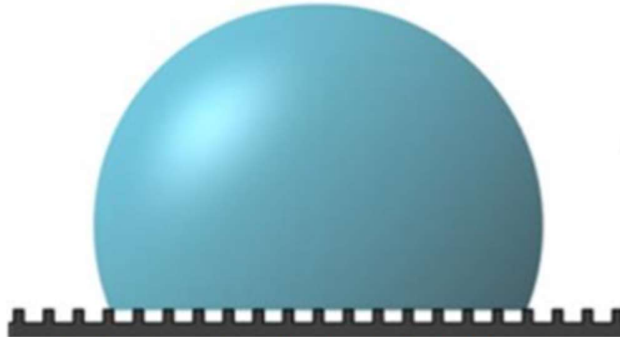
Uticaj mikrostrukturnih površina na ugao kvašenja je prvo opazio njemački biolog W. Bartholtz 1977. godine. Posmatrajući pokvašeni list lokvanja pod mikroskopom, uočio je da se kapljice vode balansiraju na minijaturnim šiljcima (Slika 1). Upravo ovi šiljci su odgovorni za samočišćenje listova lokvanja.



Slika 1: List lokvanja pod mikroskopom

Kako bismo objasnili ovu pojavu, trebati ćemo malo detaljnije razmotriti pojavu površinskog napona. Prilikom kvašenja površine se trebaju uzeti u obzir slijedeće interakcije: tečnost-gas (tečnost-plin), tečnost-površina, površina-gas. Shodno tome, potrebno je uvesti 3 različita koeficijenta površinskog napona:  $\gamma_{LG}$ ,  $\gamma_{LS}$  i  $\gamma_{SG}$  respektivno. S tim da se  $\gamma_{LG}$  obično označava prosto sa  $\gamma$ . Koeficijent  $\gamma$  predstavlja faktor proporcionalnosti između sile i dužine, odnosno energije i kontaktne površine tečnost-gas. Koeficijenti  $\gamma_{LS}$  i  $\gamma_{SG}$  predstavljaju isto, ali za interakcije tečnost-površina i površina-gas.

Na slici 2 je dat prikaz kapljice vode na mikrostrukturnoj podlozi. Podloga je sačinjena od brojnih šiljaka u obliku kvadara. Geometriju površine opisujemo preko bezdimenzionalnog faktora  $f$ , koji označuje omjer površine vrhova šiljaka u odnosu na ukupnu površinu ravne podloge. Primjetite da po definiciji vrijedi  $0 < f \leq 1$ , gdje slučaj  $f = 1$  predstavlja totalno ravnu podlogu.

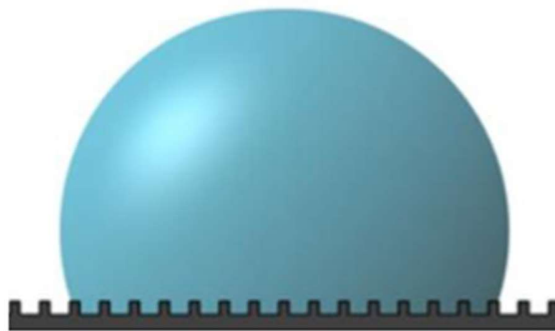


Slika 2: Kapljica na mikrostrukturnoj površini (Cassie-Baxter stanje)

<p><b>A.1</b> Izrazite ugao kvašenja kapljice na mikrostrukturnoj površini preko: <math>f</math>, <math>\gamma</math>, <math>\gamma_{LS}</math> i <math>\gamma_{SG}</math>. Uzmite da se između rupa i kapljice nalazi zrak, te da je ugao kvašenja za zrak iznosi <math>\pi</math>. Dobiveni izraz zapišite u pojednostavljenom obliku preko ugla kvašenja za ravnu površinu <math>\theta_0</math> ( Za ravnu površinu važi <math>f = 1</math>). Napomena: Ugao kvašenja je ugao između površine tečnosti i podloge.</p>	<p><b>3.0 [bod]</b></p>
---	-------------------------

Ukoliko su kapljice dovoljno velike, moguće je da voda prodire u rupe površine. Ovaj slučaj se naziva Wenzel stanje i prikazan je na Slici 3. Slučaj koji smo razmotrili u dijelu A1 se zove Cassie-Baxter stanje.

Napomena: Wenzel stanje ćemo **SAMO** razmotriti u dijelu **A2**, u ostatku zadatka uzimamo da važi Cassie-Baxter stanje.



Slika 3: Wenzel stanje (voda prodire u rupe).

<p><b>A.2</b> U tabeli ispod treba prikazati kako Wenzel i Cassie-Baxter stanja za mikrostrukturne površine utiču na ugao kvašenja kapljice. Popunite prazna mjesta u tabeli sa slijedećim opcijama: „Više hidrofobna“ (ugao kvašenja se povećava), „Više hidrofilna“ (ugao kvašenja se smanjuje) ili „Nema promjene“. Vaš odgovor fizikalno i matematički obrazložite.</p> <p><u>Napomena:</u> Za površinu kažemo da je hidrofilna ako je ugao kvašenja između <math>0</math> i <math>\frac{\pi}{2}</math>, odnosno da je hidrofobna ako je ugao između <math>\frac{\pi}{2}</math> i <math>\pi</math>.</p>	<p><b>1.2 [bod]</b></p>
---	-------------------------

Ravna površina	Cassie-Baxter	Wenzel
Hidrofilna		
Hifrofobna		

Dio B: Gradijentne površine i transportne pojave [3.8 bod]

U ovom dijelu zadatka ćemo se baviti nehomogenim mikrostrukturnim površinama: takozvanim površinama gradijenta kvašenja. Može se pokazati da kapljice postavljene na ovakvim površinama doživljavaju silu pogona uslijed gradijenta. Kao posljedica ovoga, kapljice se čak mogu transportovati uz strmu ravan prekrivenu gradijentnom površinom. Na Slici 4 je dat 2D prikaz jednostavne gradijentne površine, gdje je faktor odnosa površine dat sa linearnom ovisnosti:  $f(x) = A + \alpha x$ . Gdje je A bezdimenzionalna konstanta između 0 i 1, a  $\alpha$  je koeficijent gradijenta (jedinica  $\text{dužina}^{-1}$ ).

$$f = A$$

$$f = 1$$



Slika 4: Linearna gradijentna površina

U ovom zadatku ćemo kapljicu smatrati krutim tijelom (oblik kapljice se neće mijenjati tokom kretanja). Razmatrati ćemo poseban slučaj polusferne kapljice radijusa (polumjera)  $r$ .

**B.1** Ukoliko kapljicu postavimo na gradijentnu površinu, ona dobiti konstantno ubrzanje u smjeru  $x$  ose. Pokažite da se njeno ubrzanje može izraziti kao:

$$a = \frac{3\gamma\alpha}{2\rho r}$$

**1.8[bod]**

Napomena: Za polusfernu kapljicu vrijedi da je ugao kvašenja na ravnoj površini  $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ . (Prisjetite se dijela A1).

Osim sile uslijed površinskog napona, bitno je uračunati i silu viskoznog trenja.

**B.2** Uzimajući viskozno trenje samo ovisi o brzini  $v$ , radijusu baze kapljice i koeficijentu viskoznog trenja  $\eta$ , dimenzionalnom analizom izvedite izraz za silu trenja.

**0.5[bod]**

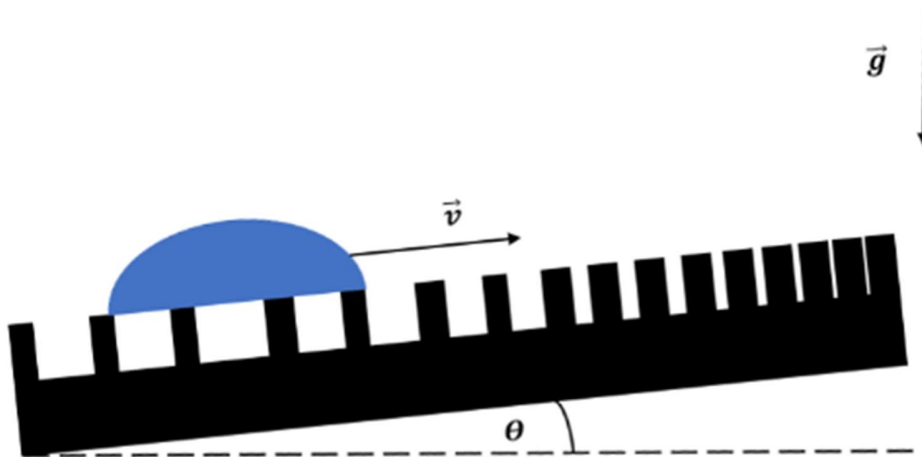


Jedna od glavnih uloga mikrostrukturnih površina je prijenos kapljica uzbrdo. Na Slici 5 je dat prikaz kapljice koja se iz mirovanja počne kretati uz strmu ravan sa gradijentnom površinom.

**B.3** Napišite izraz za položaj kapljice na strmoj ravni u ovisnosti o vremenu  $x(t)$ . Izračunajte maksimalnu brzinu koju će kapljica dostići. Razmotrite poseban slučaj polusferne kapljice. Uzmite da bezdimenzionalni koeficijent u izrazu iz B2 za polusferu iznosi  $6\pi$ .

1.5[bod]

**Poznate su sljedeće veličine:** radijus kapljice je:  $r = 1(\text{mm})$ , površinski napon vode  $\gamma = 0.072 \left(\frac{\text{N}}{\text{m}}\right)$ , viskoznost vode  $\eta = 0.001 \left(\frac{\text{Ns}}{\text{m}^2}\right)$ , gustoća vode  $\rho = 1000 \left(\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right)$ , nagib strme ravni  $\Theta = 30^\circ$ , koeficijent gradijenta  $\alpha = 0.05 \left(\text{mm}^{-1}\right)$ , gravitaciono ubrzanje  $g = 10 \left(\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)$

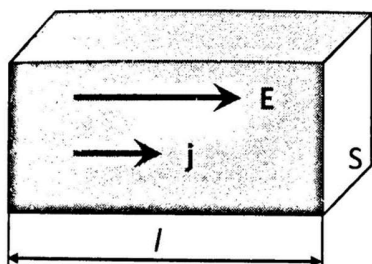


Slika 5: Kapljica na strmoj ravni

## 2. ZADATAK – Električna provodljivost metala

### DIO A. Ohmov zakon

Provodnici su materijali, najčešće metali, u kojima je uređeno kretanje slobodnih čestica, koje nazivamo električna struja, moguće u prisustvu vanjskog električnog polja. Zakon koji se odnosi na električnu struju intenziteta/jačine  $I$  koja protiče kroz provodnik sa naponom  $U$  na krajevima tog provodnika je originalno otkriven od strane Georg Ohma i ima oblik  $I = U/R$ , gdje je  $R$  otpor tog provodnika.



Slika 1

Razmotrite sada mali element metalnog materijala sa dužinom  $l$  i poprečnim presjekom  $S$ , čiji krajevi su prikačeni na napon  $U$ . Neka je  $\sigma$  specifična električna provodljivost materijala, koja je obrnuto proporcionalna sa specifičnom električnom otpornošću  $\rho$ . Veličina  $j$  je gustoća struje i predstavlja električni naboj koji prođe kroz jedinicu poprečnog presjeka u jedinici vremena. Gustoća struje zavisi od gustoće broja elektrona i prosječne brzine elektrona.

- 1) Kako glase izrazi za otpor provodnika i jačinu električne struje, preko novouvedenih veličina? Izvesti i napisati diferencijalni oblik Ohmovog zakona u skalarnom i vektorskom obliku. **(0,5 b)**
- 2) Krenuvši od Joule-Lenzovog zakona, koji je otkriven od strane James Joula i kasnije od strane Heinricha Lenza, odrediti zapreminsku gustoću termalne snage  $P_V$  koja se otpusti u provodniku tj. količinu toplote generisanu od strane električne struje po jedinici zapremine po jedinici vremena. Svoj odgovor izraziti preko  $E$  i  $\sigma$ . **(0,5 b)**

### DIO B. Drude-ov model

Nakon otkrića elektrona u 1900. godini od strane Josepha Johna Thompsona, njemački fizičar Paul Drude je predložio tzv. ključnu teoriju električne provodljivosti metala. Prema njegovoj teoriji, elektroni sa gustoćom broja  $n$ , masom  $m$  i električnim nabojem  $-e$  se mogu slobodno kretati u jonskoj kristalnoj rešetci metala, povremeno se sudarajući sa jonima koji su locirani na čvorovima i prenose kinetičku energiju tim jonima.

Pravo kretanje elektrona je veoma kompleksno, zbog haotičnog termalnog kretanja. Usred utjecaja eksternih polja, svi elektroni dobijaju isto ubrzanje i zbog toga im se brzina povećava. Ovo rezultuje uređenim kretanjem elektrona, zbog čega dolazi do pojave električne struje. Nas zanima samo uređeno usmjereno kretanje elektrona koje se naslanja na njihove nasumične termalne šetnje.

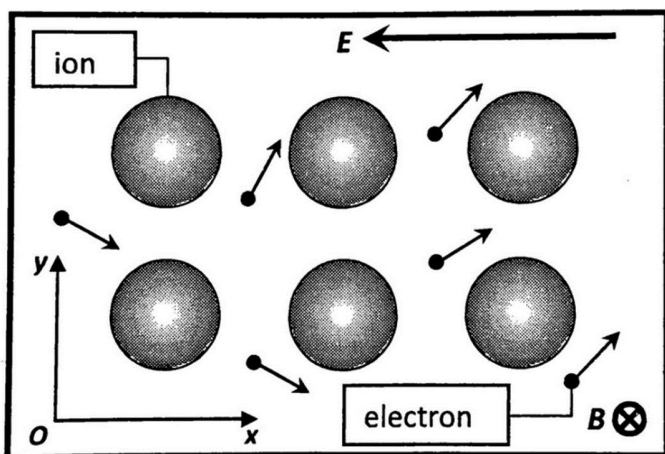
Obzirom da je prava slika električne provodljivosti jako komplicirana, mi usvajamo pojednostavljeni model. Pretpostavljamo da elektron bez početne brzine ubrzava u vremenskom intervalu  $\tau$  i zatim se sudara sa jonom, prenoseći mu kinetičku energiju. Zatim taj proces počinje ponovo, elektron ponovo ubrzava u vremenu  $\tau$ , ponovo se sudara sa novim jonom itd. Jako je

važno da prilikom ovog procesa, elektroni međusobno ne interaguju. Imajući sve ovo na umu, odgovorite na sljedeće zadatke:

- 3) Odrediti vektor prosječne brzine elektrona  $u$ . Odgovor izraziti preko  $e$ ,  $E$ ,  $m$  i  $\tau$ . **(1 b)**
- 4) Gustoća struje u uzorku je određena prosječnom brzinom komponenti paralelnih sa vanjskim električnim poljem jačine  $E$ . Pokazati da Ohmov zakon vrijedi u ovom pojednostavljenom modelu i odrediti specifičnu provodljivost metala  $\sigma$ . Odgovor izraziti preko  $e$ ,  $E$ ,  $n$ ,  $m$  i  $\tau$ . **(0,5 b)**
- 5) Odrediti količinu kinetičke energije  $Q_k$  prenesenu od strane elektrona na kristalnu rešetku po jedinici zapremine i po jedinici vremena. Odgovor izraziti preko  $e$ ,  $E$ ,  $n$ ,  $m$  i  $\tau$ . **(0,5 b)**

### DIO C. Magnetorezistencija

Jedan od važnih galvanomagnetnih fenomena je promjena u provodljivosti provodnika koji je pod



Slika 2

utjecajem transferalnog magnetnog polja. Ovaj fenomen dobio je naziv efekat magnetorezistencije. Prema eksperimentima, relativna devijacija/odstupanje od specifične provodljivosti  $\Delta\sigma/\sigma$  pri ne tako jakom magnetnom polju sa indukcijom  $B$  je data formulom:

$$\frac{\Delta\sigma}{\sigma} = \frac{\sigma(B) - \sigma(B = 0)}{\sigma(B = 0)} = \mu B^v$$

gdje su  $\mu$  i  $v$  neke konstante.

Koristeći Drude-ov model iz dijela B, riješiti iduće zadatke. Pažljivo analizirati

Sliku 2, jer predstavlja sistem koordinata koje koristimo i daje nam pravce svih vektora.

- 6) Pronaći zavisnost od vremena  $t$  projekcija  $u_x(t)$  i  $u_y(t)$  komponenti brzine elektrona između dva uzastopna sudara. Odgovor izraziti preko  $e$ ,  $E$ ,  $B$ ,  $m$  i  $t$ .  
(Hint: Ovaj dio zadatka najlakše je riješiti ako kretanje posmatrate iz drugog inercijalnog referentnog sistema.) **(2,5 b)**
- 7) Gustoća struje u uzorku je određena preko prosječne brzine komponente paralelne sa vanjskim električnim poljem jačine  $E$ . Pretpostavljajući da je magnetno polje indukcije  $B$  dovoljno malo, pronaći konstante  $\mu$  i  $v$ . Odgovor izraziti preko  $e$ ,  $m$  i  $\tau$ . **(2 b)**

## DIO D. Hallov efekt

1879. godine Edwin Hall je otkrio fenomen pojave transferzalne razlike potencijala, koja je kasnije nazvana Hallov napon. Taj fenomen pojavljuje se stavljanjem provodnika koji nosi struju u konstantno transferzalno magnetno polje.

U najjednostavnijem razmatranju, Hallov efekt je opisan na sljedeći način: Pretpostavimo da električna struja protiče kroz metalnu šipku usljed valjnjskog električnog polja jačine  $E$ . Takvu šipku postavimo u slabo transferzalno magnetno polje indukcije  $B$ . Magnetno polje zakreće elektrone, tako da se više ne kreću „pravo“ kroz šipku, nego prema jednom od rubova šipke. Lorentzova sila, unatoč efektu magnetorezistencije, izaziva da dolazi do nakupljanja negativnog naboja blizu jednog kraja šipke i pozitivnog naboja u blizini suprotnog kraja šipke. Nagomilavanje naboja istraje sve dok transferzalno električno polje  $E_H$ , koje se generiše od strane nagomilanih naboja (usmjereno duž  $Oy$ ), totalno ne kompenzira transferzalni pomak elektrona u vremenskom intervalu  $\tau$ .

- 8) Na Slici 2, gdje će biti nagomilan negativan naboj, na vrhu ili na dnu? **(0,5 b)**
- 9) Pronađi zavisnost od vremena  $t$  projekcija  $u_x(t)$  i  $u_y(t)$  komponenti brzine elektrona između dva uzastopna sudara. Odgovor izraziti preko  $e, E_H, B, m$  i  $t$ . **(1,5 b)**
- 10) Pronađi jačinu Hallovog električnog polja  $E_H$ . Odgovor izraziti preko  $e, E, B, m$  i  $\tau$ , a zatim preko  $e, j, B$  i  $n$ . **(0,5 b)**

Za rješavanje, koristiti entitete:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$$

*This space we declare to be infinite...*  
*In it are an infinity of worlds of the same kind as our own.*  
– Giordano Bruno (1584)

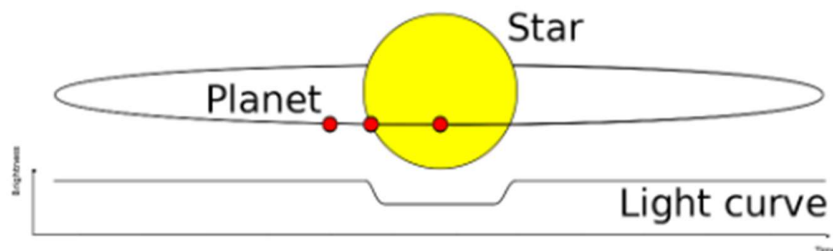
### Zadatak 3 [12b]

## Metoda tranzita u potrazi za egzoplanetama

Egzoplanete su planete izvan našeg, Sunčevog sistema. Prvi dokaz o njihovom postojanju pojavio se 1917. godine, ali nije prepoznato da se radi o egzoplaneti. Prva potvrda otkrića egzoplanete stigla je 1992. Do 1. aprila 2023, potvrđeno je 5346 egzoplaneta u 3943 planetarna sistema. Očekuje se da će novi svemirski teleskop James Webb otkriti još egzoplaneta, kao i mnogo zanimljivih podataka o njima, poput njihovog sastava i potencijala za život. Upravo su u tom aspektu (astrobiologije) egzoplanete posebno interesantne.

Međutim, pronalazak egzoplaneta nije nimalo jednostavan zadatak. U većini slučajeva ih je jako teško ili nemoguće direktno posmatrati jer je zvijezda neuporedivo sjajnija od same planete koja oko nje kruži. Srećom, postoje brojne druge metode. Jedna od njih koja je posebno plodonosna je metoda tranzita. Oko 75% egzoplaneta je otkriveno ovom metodom. Pojednostavljeno rečeno, metoda tranzita se sastoji u sljedećem: na svojoj orbiti oko zvijezde, planeta sa naše tačke gledišta prolazi ispred zvijezde i djelimično je zaklanja, što uzrokuje smanjenje u mjerenoj sjajnosti zvijezde.

U ovom zadatku bavit ćemo se ispitivanjem osnovnih principa metode tranzita i njihovom primjenom na stvarnim podacima sa svemirskog teleskopa Kepler. Kroz cijeli zadatak možete pretpostaviti da je orbita planete kružnica. Također, dijelovi zadatka su velikim dijelom međusobno nezavisni. Na kraju teksta zadatka nalaze se potrebne konstante.



Slika 1: Metoda tranzita

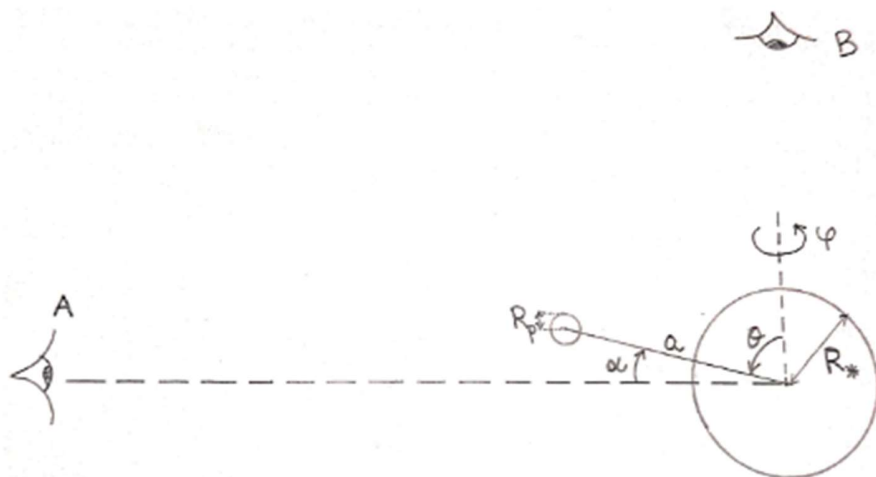
**A: Vjerovatnoća opažanja tranzita****[1.5b]**

Dobro je poznato da su planetarni sistemi, pa i same galaksije, u većini slučajeva oblika diska, što potiče od fizike njihovog nastanka. Pođimo od jednostavne pretpostavke: nema razloga da priroda preferira jednu orijentaciju nad drugom. To znači da kao posmatrači sa Zemlje možemo vidjeti neki drugi planetarni sistem pod bilo kojim uglom, tj. bilo kojom orijentacijom u odnosu na nas. Međutim, samo će neke preferabilne orijentacije omogućiti posmatranje tranzita planete i eventualno detektovanje metodom tranzita.

U ovom dijelu zadatka, zanima nas ispitivanje vjerovatnoće da planeta obavi vidljiv tranzit sa tačke gledišta udaljenog posmatrača (u beskonačnosti) koji je nasumično orijentisan u odnosu na orbitalnu ravan posmatranog sistema. Kako se vidi na slici, razmatramo planetu radijusa  $R_p$  u orbiti radijusa  $a$  oko zvijezde mase  $M_*$  i radijusa  $R_*$ . Primijetite da posmatrač A na slici 2 može vidjeti tranzit planete ispred zvijezde, dok posmatrač B ne može.

**A1.** Na osnovu date slike, pretpostavljajući da je radijus orbite puno veći od radijusa zvijezde ( $R_*/a \ll 1$ ) i radijus zvijezde puno veći od radijusa planete ( $R_p/R_* \ll 1$ ), pokažite da je maksimalna apsolutna vrijednost ugla  $\alpha$  iznad koje se tranzit ne može opaziti

$$|\alpha_{\max}| \approx \frac{R_*}{a}.$$

**[0.5b]**

Slika 2: Geometrija za planetu u tranzitu ispred zvijezde u dijelu A. Uglovi  $\theta$  i  $\varphi$  su standardni uglovi sfernog koordinatnog sistema. Planeta na slici izlazi i ulazi u papir kružeći oko zvijezde.

**A2.** Uzimajući u obzir da će posmatrač poput nas vidjeti planetarni sistem sa bilo kojom nasumičnom orijentacijom u **3D prostoru** (ne 2D ravni slike), napišite integral za dio svih prostornih uglova  $\Delta\Omega$  koji odgovaraju vidljivom tranzitu. Sjetite se da je  $d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$  (pogledajte oznake na slici 2).

Riješite taj integral i, koristeći aproksimaciju malih uglova (za  $R_*/a \ll 1$ ), pokažite da je vjerovatnoća opažanja tranzita data izrazom

$$P_{\text{transit}} = \frac{\Delta\Omega}{4\pi} \approx \frac{R_*}{a}.$$

Trebat ćete riješiti dupli integral. Njega riješite tako što prvo riješite jedan (unutrašnji) integral po jednoj varijabli (smatrajući drugu konstantom), a potom ponovite slično sa drugim integralom (po drugoj varijabli, smatrajući prvu konstantom). [0.8b]

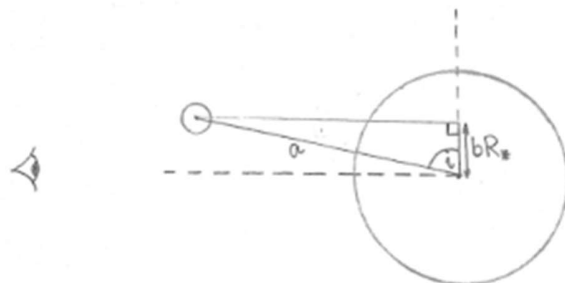
**A3.** Izračunajte ovu vjerovatnoću za Merkur u Sunčevom sistemu (za nasumično orijentisanog vanjskog posmatrača), pretpostavljajući da je orbita Merkura kružnica radijusa  $a \approx 0.4$  AU (premda je jako ekscentrična), kao i za predstavnika egzoplaneta tipa vrućeg Jupitera<sup>a</sup> oko suncolike zvijezde, tipično sa  $a \approx 0.05$  AU. [0.2b]

<sup>a</sup>Vrući Jupiteri su klasa egzoplaneta, plinoviti divovi slični Jupiteru, ali sa relativno malim radijusom orbite i periodom, te visokom površinskom temperaturom.

## B: Trajanje tranzita

[2b]

Za sljedeće dijelove zadatka uvest ćemo nove veličine: ugao  $i$  koji opisuje orbitalnu inklinaciju, te  $b$  (tzv. parametar sudara) koji definišemo kao odnos projektovane udaljenosti između centara zvijezde i planete i radijusa zvijezde (slika 3). Očigledno je  $bR_* = a \cos i$ . Također, omjer  $R_p/R_*$  pojavljuje se dovoljno često da bi zaslužio vlastitu oznaku,  $k$ .



Slika 3. Za vidljiv tranzit, parametar  $b$  varira od  $b = 0$  na centru diska zvijezde do  $b = 1$  na ivici diska.

**B1.** Izvedite izraz za ukupno vrijeme trajanja tranzita  $\tau_t$ . Pretpostavite da se planeta za posmatrača prividno kreće po ravnoj liniji preko diska zvijezde, te da je orbita kružnog oblika. Pokažite da je [1b]

$$\tau_t = 2\sqrt{\frac{a^3}{GM_*}} \arcsin\left(\frac{R_*}{a} \sqrt{(1+k)^2 - b^2}\right).$$

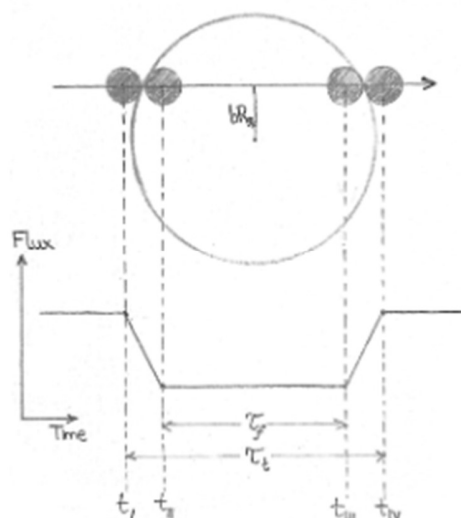
**B2.** Za ugao inklinacije  $i = 90^\circ$  (tj. savršeno poravnanje za posmatranje tranzita), koristeći ponovo iste aproksimacije malog radijusa planete i velike udaljenosti, pokažite da se izraz za vrijeme trajanja tranzita svodi na

$$\tau_0 \approx 2R_* \sqrt{\frac{a}{GM_*}}$$

U ovom slučaju izračunajte vrijeme trajanja tranzita (u satima) za Merkur i istog predstavnika vrućih Jupitera iz dijela A3. **[0.5b]**

Na osnovu vaših rezultata u A3 i B2, trebali biste moći zaključiti da je lakše uočiti tranzite egzoplaneta sličnih vrućim Jupiterima. Upravo zbog toga je metoda tranzita orijentisana ka otkrivanju egzoplaneta koje su relativno blizu svojim zvijezdama.

Prilikom kretanja preko diska zvijezde, planeta provede neko vrijeme prelazeći ivicu diska, pri čemu se povećava dio površine diska koji prekriva planeta. Kada se disk planete u potpunosti nalazi preko diska zvijezde, grafik prelazi u ravnu liniju (pretpostavite da je radijus planete dovoljno mali u odnosu na radijus zvijezde, tako da se uvijek desi da puni disk planete tranzitira). Kako se vidi na idealiziranom grafiku ispod (slika 4), dolazi do smanjenja fluksa (ali ne trenutačno), zatim se grafik izravna i ponovo raste do normalne vrijednosti.



Slika 4: Ilustracija tranzita i idealizirana svjetlosna kriva sa prikazana četiri karakteristična trenutka i opisanim veličinama  $\tau_t$  i  $\tau_f$ .

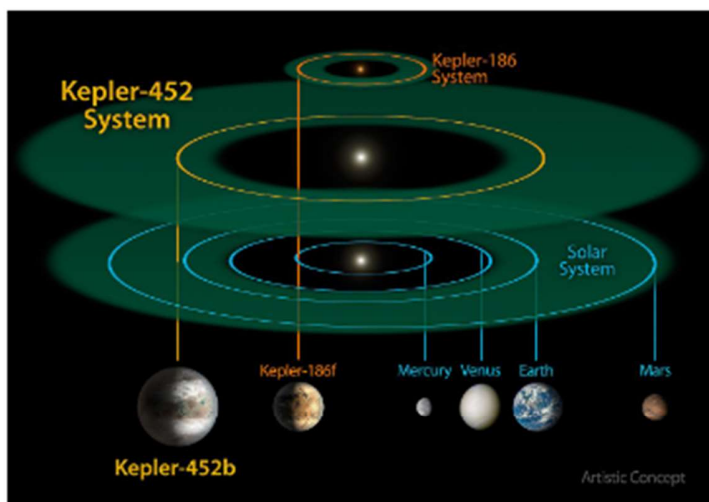
**B3.** Modifikujte vašu formulu iz dijela B1, koja zapravo daje  $\tau_t = t_{IV} - t_I$  ( $t$  - total), tako da dobijete izraz za  $\tau_f = t_{III} - t_{II}$  ( $f$  - full), tj. vrijeme trajanja "punog" tranzita (tokom kojeg se disk planete u cjelosti nalazi preko diska zvijezde). **[0.5b]**



### C: Zemlja 2.0

[4b]

U ovom dijelu zadatka radit ćemo sa stvarnim podacima sa svemirskog teleskopa Kepler. Konkretno, posmatrat ćemo sistem Kepler-452 (udaljen oko 1800 svjetlosnih godina od Zemlje), čija je zvijezda slična Suncu (poluprečnika  $R_* = 1.11R_\odot$ , mase  $M_* = 1.037M_\odot$  i površinske temperature  $T_* = 5757\text{ K}$ ).



Slika 5: Sunčev sistem i sistemi Kepler-452 i Kepler-186 sa prikazanim nastanjivim zonama (zelena). Nas ovdje zanima Kepler-452 koji je puno sličniji Sunčevom sistemu.

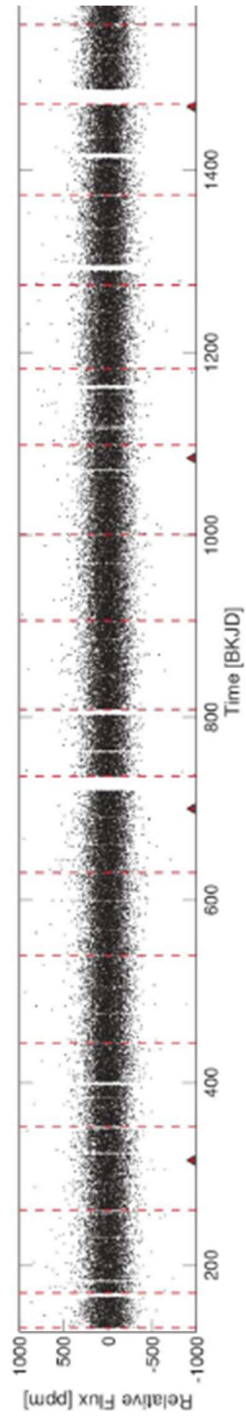
Zasad jedina planeta otkrivena u ovom sistemu je Kepler-452b, čije ćemo karakteristike ispitivati. Za ovaj dio zadatka, ako niste riješili dio A1, koristite gotovu jednačinu za  $\tau_T$ . Ne zaboravite detaljno pročitati opise ispod svake slike/grafika.

C1. Na osnovu slike 6 procijenite period revolucije  $T$  planete Kepler-452b (vrijeme potrebno za jednu revoluciju oko zvijezde) i uporedite ga sa zemaljskom godinom (365.24 dana). [0.7b]

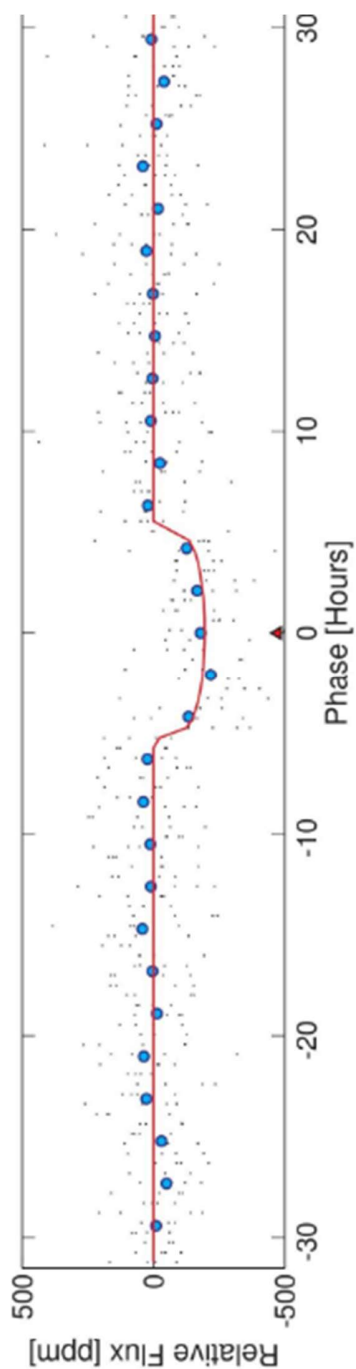
C2. Na osnovu rezultata u C1, odredite radijus orbite  $a$  planete Kepler-452b i uporedite ga sa radijusom orbite Zemlje (tj. izrazite ga u astronomskim jedinicama). [0.3b]

C3. Na osnovu slike 7 odredite radijus  $R_p$  planete Kepler-452b i uporedite ga sa radijusom Zemlje. [1b]

C4. Odredite parametar sudara  $b$  i ugao inklinacije  $i$  (opisane u dijelu B) za planetu Kepler-452b. [1b]



Slika 6: Relativni fluks zvijezde u zavisnosti od vremena za Kepler-452. Trouglovi prikazuju trenutke četiri tranzita u kvartalima 3, 7, 11 i 15, dok isprekidane linije označavaju granice između kvartala rada teleskopa. Na y-osi prikazan je relativni fluks zvijezde ( $\Delta F/F$ ) (u dijelovima po milionu, tj.  $\cdot 10^{-6}$ ), a na x-osi vrijeme (u danima).



Slika 7: Fazno presavijen grafik relativnog fluksa zvijezde u zavisnosti od vremena za Kepler-452. Zavisnost prikazana ovdje je ista kao na slici 6, samo što je fazno presavijena na periodu planete. Trougao prikazuje trenutak sva četiri tranzita. (Možete zamisliti da su sa grafika na slici 6 samo izrezana četiri dijela sa tranzitom i onda sva četiri grafika posložena jedan na drugi.) Na y-osi prikazan je relativni fluks zvijezde ( $\Delta F/F$ ) (u dijelovima po milionu, tj.  $\cdot 10^{-6}$ ), a na x-osi vrijeme (u satima).

C5. Zanemarujući utjecaj atmosfere i posmatrajući planetu i zvijezdu kao apsolutno crna tijela, te zvijezdu kao jedini izvor toplote, odredite površinsku temperaturu  $T_{\text{eq}}$  planete Kepler-452b (tzv. ravnotežnu temperaturu). Uzeti da je albedo  $A$  (procenat upadne svjetlosti koja se reflektuje nazad u svemir) za Kepler-452b jednak 0.3. [1b]

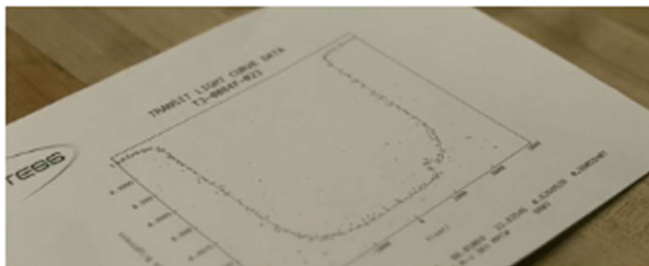
C6. Na osnovu svega izračunatog, da li smo našli Zemlju 2.0?

## D: Anomalije

[4.5b]

Svjetlosne krive koje se dobiju posmatranjem tranzita nemaju uvijek savršen oblik s kakvim smo radili u dijelu B. Ove anomalije mogu ukazivati na zanimljive karakteristike posmatranih tijela i sistema.

U filmu *Clara* (2018) — topla preporuka autora zadatka — astronom Isaac i mlada umjetnica Clara su, kao i mnogi drugi širom svijeta, u potrazi za novim egzoplanetama u podacima teleskopa TESS. I dok svi traže planete karakteristika sličnih Zemlji, nadajući se da bi na nekoj od njih mogao postojati život, Isaac i Clara zauzmu drugačiji pristup: tražit će anomalije u podacima sa teleskopa koje bi mogle ukazati na postojanje inteligentne vanzemaljske civilizacije. Nakon nekog vremena, Isaac pronalazi anomaliju u svjetlosnoj krivoj, koja ima sljedeći oblik:

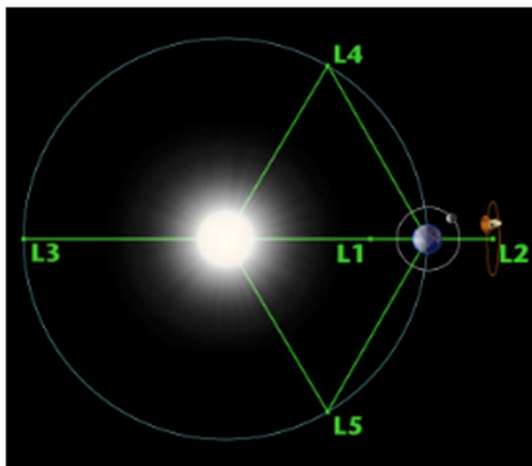


Slika 8: Anomalija u podacima

Kako se navodi u filmu, jedino objašnjenje za ovo je da se neki objekat nalazi na  $\mathcal{L}_1$  tački sistema. Za dva tijela koja kruže oko zajedničkog centra mase, postoji pet ravnotežnih (Lagrangeovih) tačaka u prostoru za treće tijelo male mase postavljeno u njima, tako da ono miruje u odnosu na dva masivna tijela. Naime, gravitacione sile dva velika tijela na treće djeluju tako da proizvedu takvu centripetalnu silu koja osigurava kružno kretanje tijela koje je usklađeno sa orbitiranjem dva druga tijela. Alternativno, posmatrano iz rotirajućeg sistema koji oko centra mase rotira ugaonom brzinom dva orbitirajuća tijela, gravitacione sile na treće tijelo su u ravnoteži sa centrifugalnom silom na njega, što mu omogućava da miruje (u ovom sistemu referencije) u odnosu na druga dva tijela. Pretpostavit ćemo da je masa trećeg tijela mala, tako da ne utječe na poziciju centra mase sistema.

Ipak, poprilično je očigledno zašto ovakva svjetlosna kriva (slika 8) ne može biti posljedica prisustva objekta na  $\mathcal{L}_1$ . Naime, simetričnost svih dešavanja prilikom tranzita

(u odnosu na središnju osu) u takvoj situaciji morala bi se manifestovati kao neka analogna simetrija u obliku svjetlosne krive. Ukratko, nije moguće da ovako asimetričan oblik za uzrok ima jednu veoma simetričnu situaciju.



Slika 9: Lagrangeove tačke u sistemu Sunce-Zemlja (nije prikazano u stvarnoj razmjeri)

**D1.** Koristeći skice i dijagrame, objasnite (kvalitativno) kakvu anomaliju bi proizvelo prisustvo objekta (nezanemarljivih dimenzija) na  $\mathcal{L}_1$ , te obrazložite i skicirajte oblik svjetlosne krive nastale prilikom tranzita u tom scenariju (radi jednostavnosti razmatrajte samo situaciju sa  $b = 0$  i objektom veličine slične planeti). **[0.5b]**

Neka je  $a$  udaljenost između centara zvijezde i planete masa  $M_*$  i  $M_p$  respektivno i neka je  $r$  udaljenost tačke  $\mathcal{L}_1$  od planete. U tačku  $\mathcal{L}_1$  postavimo malo tijelo mase  $m$ .

**D2.** Nadite jednačinu (petog stepena) čije rješenje daje udaljenost  $r$  tačke  $\mathcal{L}_1$  od planete koristeći navedene veličine (ne trebate je riješiti). Radi jednostavnijeg konačnog zapisa, uvedite smjene (napišite jednačinu po  $z$  i  $\mu$ ):

$$z = \frac{r}{a}, \quad \mu = \frac{M_p}{M_* + M_p}.$$

Nakon toga pokažite da je u specijalnom slučaju za  $M_* \gg M_p$ :

$$r \approx a \sqrt[3]{\frac{M_p}{3M_*}}.$$

**[2.5b]**

**D3.** Da li je tačka  $\mathcal{L}_1$  položaj stabilne ili labilne ravnoteže (u odnosu na pravac koji spaja dva masivna tijela)? Potvrdite svoju tvrdnju matematički. Šta vam to može reći o prirodi i porijeklu objekata koji duže vrijeme ostaju na  $\mathcal{L}_1$  (da li je moguće da su prirodni)? **[1.5b]**



Konstante:

astronomska jedinica:  $1 \text{ AU} = 150 \cdot 10^6 \text{ km}$   
univerzalna gravitaciona konstanta:  $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$   
radijus Sunca:  $R_{\odot} = 6.96 \cdot 10^8 \text{ m}$   
masa Sunca:  $M_{\odot} = 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$   
radijus Zemlje:  $R_{\oplus} = 6371 \text{ km}$   
masa Zemlje:  $M_{\oplus} = 5.97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$   
Stefan-Boltzmannova konstanta:  $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$

Matematička pomoć:

$$(1+x)^n \approx 1+nx, \quad |x| \ll 1$$

Federalno Takmičenje 2023  
Zadatak 1-Rješenje

Muhamed Sokolović  
Prirodno-matematički fakultet, Sarajevo

1 Dio A: 4.2 [bod]

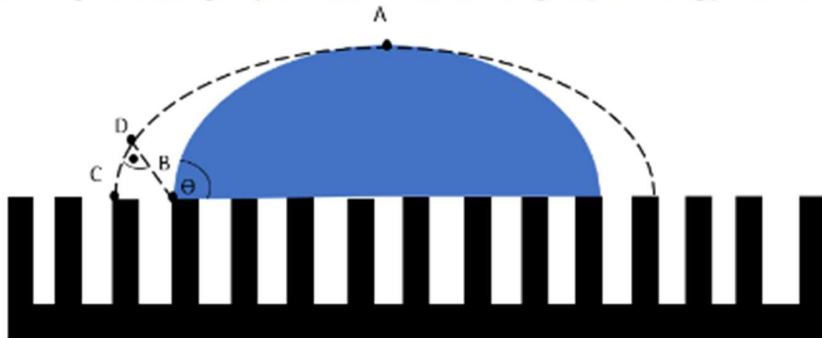
1.1 A1: 3.0 [bod]

Dati zadatak je moguće riješiti preko sila ili preko energija. U našem rješenju ćemo posmatrati energiju kapljice.

U stanju ravnoteže, treba vrijediti da je energija minimalna. Dakle, ako kapljicu malo deformišemo iz ravnotežnog stanja, ukupna promjena energije bi trebala iznositi

$$\Delta E = 0 \quad (1)$$

S druge strane, gledajući sliku 1 vidimo da promjena energije iznosi:



$$\Delta E = L(\overline{CD}\gamma_{LG} + \gamma_{LG}\overline{CB}(1-f) - f\overline{CB}\gamma_{SG} + f\overline{CB}\gamma_{SL}) \quad (2)$$

Gdje je  $L$  dužina kapi. Iz geometrije, vidimo da je

$$\overline{CD} = \overline{CB}\cos(\Theta) \quad (3)$$

Napomena: Ovdje smo uzeli da je  $\overline{AB} \approx \overline{AD}$ . Ova aproksimacija je razumna, jer je promjena dužine kvadratnog malog reda. Kombinujući (1)-(3), dobivamo:



$\cos(\Theta)\gamma + \gamma(1 - f) - f\gamma_{SG} + f\gamma_{SL} = 0$ . Konačan izraz za ugao kvašenja je:

$$\Theta = \arccos\left[f\frac{\gamma_{SG} - \gamma_{SL}}{\gamma} - (1 - f)\right] \quad (4)$$

Uvrštavajući  $f = 1$  u izraz (4), vidimo da za ravnu površinu važi:  
 $\cos(\Theta_0) = \frac{\gamma_{SG} - \gamma_{SL}}{\gamma}$ . Pojednostavljeni izraz (4) je:

$$\cos(\Theta) = f\cos(\Theta_0) - (1 - f) \quad (5)$$

## 1.2 A2: 1.2 [bod]

Pošto Wentzel-ovom stanju voda prodire u rupe, po analognom izvođenju iz dijela A1 možemo dobiti izraz:

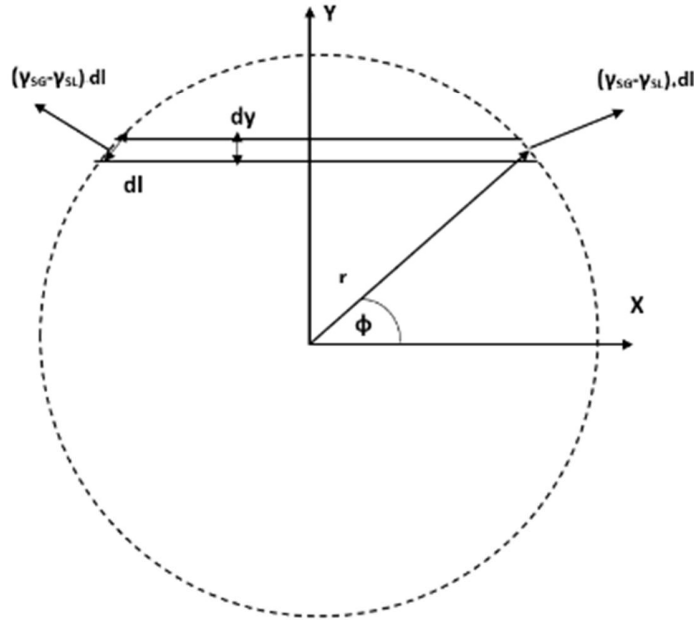
$$\cos(\Theta) = f' \cos(\Theta_0) \quad (6)$$

Gdje je  $f' > 1$ , jer voda ima veću kontaktnu površinu sa vodom nego što bi imala za ravnu podlogu. Shodno tome, u intervalu  $0 \leq \Theta < \frac{\pi}{2}$  kosinus je opadajuća funkcija. U tom intervalu:  $\cos(\Theta) > \cos(\Theta_0)$ , pa je  $\Theta < \Theta_0$ . U intervalu  $\frac{\pi}{2} \leq \Theta \leq \pi$  je kosinus rastuća funkcija, pa je  $\Theta > \Theta_0$ . Koristeći izraz (4) i uslov da je  $0 \leq f \leq 1$ , vidimo da se u Cassie-Baxter stanju ugao kvašenja uvijek povećava. Dakle, popunjena tabela je:

Ravna površina	Cassie-Baxter	Wentzel
Hidrofilna	<b>Više hidrofobno</b>	<b>Više hidrofilno</b>
Hifrofobna	<b>Više hidrofobno</b>	<b>Više hidrofobno</b>

## 2 Dio B: 3.8 [bod]

### 2.1 B1: 1.8 [bod]



Na Slici 2 je dat prikaz popreznog presjeka dodirne površine kapljice. Kako bismo odredili silu pogona, posmatrajmo mali dio popreznog presjeka debljine  $dy$ . Na prednji i zadnji kraj djelića tekućine će djelovati sile po jedinici dužine:

$$(\gamma_{SG} - \gamma_{SL})_+; (\gamma_{SG} - \gamma_{SL})_- \quad (7)$$

Gdje + označava prednji kraj, a - zadnji kraj. Sa Slike 2 vidimo da će se sile u smjeru  $y$  ose sa donje i gornje polovice poništiti, a sile u smjeru  $x$  ose sabrati (za prednji i zadnji kraj respektivno). Tako da ukupnu silu na kapljicu možemo izraziti preko integrala:

$$2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} [(\gamma_{SG} - \gamma_{SL})_+ - (\gamma_{SG} - \gamma_{SL})_-] \cos(\phi) r d\phi \quad (8)$$

Iz dijela A, znamo da  $(\gamma_{SG} - \gamma_{SL})_+ - (\gamma_{SG} - \gamma_{SL})_-$  možemo izraziti kao  $\gamma(\cos(\Theta)_+ - \cos(\Theta)_-)$ . Uvštavajući linearnu ovisnost datu u zadatku:

$$\cos(\Theta)_+ - \cos(\Theta)_- = f_{(x)}(\cos(\theta_0+1)-1) - [f_{(-x)}(\cos(\theta_0+1)-1)] = A + \alpha x - A\alpha(-x) = 2\alpha x \quad (9)$$

Gdje smo uvrstili  $\cos(\theta_0) = 0$

$$2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} [(\gamma_{SG} - \gamma_{SL})_+ - (\gamma_{SG} - \gamma_{SL})_-] \cos(\phi) r d\phi = 2\gamma \int_0^{\frac{\pi}{2}} [A + \alpha x - A - \alpha(-x)] r \cos(\phi) d\phi = 2r^2 \alpha \gamma \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(\phi) d\phi \quad (10)$$

Integral  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(\phi) d\phi$  možemo svesti na tablični koristeći trigonometrijski identitet  $\cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$ . Tako da je rješenje (9):

$$F = \pi r^2 \gamma \alpha \quad (11)$$

Ubrzanje možemo dobiti kao  $a = \frac{F}{m}$ , gdje je masa data sa:

$$m = \rho \frac{2\pi}{3} r^3 \quad (12)$$

Kombinujući (10) i (11) dobivamo traženi izraz za ubrzanje:

$$a = \frac{3\gamma\alpha}{2\rho r} \quad (13)$$

## 2.2 B2: 0.5 [bod]

Označimo masu, dužinu i vrijeme sa M, L i T, respektivno. Tada brzina ima dimenzije:  $v \propto LT^{-1}$ . Viskoznost:  $\eta \propto MT^{-1}L^{-1}$ . Sila:  $F_{tr} \propto MLT^{-2}$ . Pretpostavimo izraz oblika:

$$F_{tr} \propto r^\alpha v^\beta \eta^\gamma \quad (14)$$

Trebamo riješiti sistem jednačina:

$$\begin{aligned} \alpha + \beta - \gamma &= 1 \\ -\beta - \gamma &= -2 \\ \alpha &= 1 \end{aligned}$$

Odakle dobivamo:

$$F_{tr} = C \eta r v \quad (15)$$

Gdje je C bezdimenzionalni faktor proporcionalnosti.

## 2.3 B3: 1.5 [bod]

Koristeći izraze iz dijelova B1 i B2, te uvrštavajući faktor proporcionalnosti  $6\pi$ , dobivamo izraz za ubrzanje polusferne kapljice:

$$a = \frac{3}{2} \frac{\gamma\alpha}{\rho r} - g \sin(\theta) - \frac{9\eta v}{\rho r^2} \quad (16)$$

S druge strane, imamo da je  $a = \frac{dv}{dt}$ . Brzinu dobivamo rješavanjem:  $\frac{dv}{dt} = f_p - \beta v$ . Gdje smo uveli smjene:  $f_p = \frac{3}{2} \frac{\gamma \alpha}{\rho r} - g \sin(\theta)$  i  $\beta = \frac{9\eta}{\rho r^2}$

$$\frac{dv}{f_p - \beta v} = dt \Rightarrow \int_{v_0}^{v(t)} \frac{dv}{f_p - \beta v} = \int_0^t dt \quad (17)$$

Integral (17) je tablični. Uvrštavajući granični uslov da se kapljica počinje kretati iz mirovanja  $v_0 = 0$ , dobivamo izraz za brzinu:

$$v(t) = v_{max}(1 - e^{-\beta t}) \quad (18)$$

Izraz (18) možemo integrirati ponovo da bismo dobili izraz za položaj:

$$v(t) = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \int_{x_0}^{x(t)} dx = \int_0^t v_{max}(1 - e^{-\beta t}) dt$$

$$x(t) = v_{max}(t + \frac{1}{\beta}(e^{-\beta t} - 1))$$

Gdje smo uvrstili početni uslov  $x_0 = 0$ . Iz (18) vidimo da je maksimalna brzina:

$$v_{max} = \frac{f_p}{\beta} \approx 44.4(\frac{mm}{s}) \quad (19)$$

### 3 Završni komentar i literatura

Formule, kao i brojne vrijednosti konstanti su preuzete iz navedene literature:

[1] Launay, G., Sadullah, M.S., McHale, G. et al. *Self-propelled droplet transport on shaped-liquid surfaces*. *Sci Rep* 10, 14987 (2020)

[2] Liu, C., Sun, J., Li, J. et al. *Long-range spontaneous droplet self-propulsion on wettability gradient surfaces*. *Sci Rep* 7, 7552 (2017)

Također predlažem da takmičari pogledaju slijedeći video: <https://www.youtube.com/watch?v=puYo9w4cu0c>

Jedno pitanje koje možda naupadne takmičarima nakon izrade ovog zadatka je: "Da li ovakve površine krše drugi zakon termodinamike?". Naime, na početku imamo kapljicu na dnu strme ravni sa brzinom 0 i na kraju imamo kapljicu na vrhu srme ravni sa brzinom 0. Kapljica je naizgled poprimila dodatnu energiju, što implicira da smo stvorili prerperum mobile. Međutim, treba uzeti u obzir da je energija usljed površinskog napona manja na vrhu strme ravni. To znači da će se na vrhu trebati uložiti veća sila da bi se kapljica odvojila od gradijentne površine. Pošto je  $0 \leq f \leq 1$ , ovo implicira da postoji maksimalna dužina strme ravni za koju je prenos kapljice moguć. Za koeficijent =  $0.05(mm^{-1})$  dobivamo da je ta dužina  $2(cm)$ . Ipak nismo prekršili zakone termodinamike ☺

## 2. ZADATAK – Električna provodljivost metala – RJEŠENJE

### DIO A. Ohmov zakon

1) Otpor provodnika i jačina električne struje su tada dati kao:

$$R = \rho \frac{l}{S} = \frac{1}{\sigma} \frac{l}{S}, \quad I = j \cdot S \quad (0,25 b)$$

Ako uzmemo u obzir da je jačina električnog polja data kao  $E = U/l$ , onda će Ohmov zakon da poprimi novi oblik:  $j = \sigma E$

Ako uzimamo u obzir smjerove električnog polja i vektora gustoće struje, tada ovaj zakon možemo napisati i u vektorskom obliku:  $\vec{j} = \sigma \vec{E}$  (0,25 b)

2) U skladu sa Joule-Lentzovim zakonom, snaga zagrijavanja koja se oslobodi u provodniku jednaka je:  $P = U^2/R$

Što znači da u našem slučaju snaga zagrijavanja  $P_V$  je napisana kao:

$$P_V = \frac{U^2}{RV} = \frac{U^2}{RS l} \quad (0,25 b)$$

Uvršavanjem poznatih vrijednosti, možemo dobiti konačan rezultat.

$$R = \rho \frac{l}{S} = \frac{1}{\sigma} \frac{l}{S}, \quad E = \frac{U}{l}$$
$$\Rightarrow P_V = \sigma \cdot E^2 \quad (1) \quad (0,25 b)$$

### DIO B. Drude-ov model

3) Možemo napisati drugi Newton zakon za kretanje elektrona u konstantnom električnom polju kao:

$$ma = F = -eE \quad (2) \quad (0,25 b)$$

Iz jednačine (2) možemo vidjeti da za vremenski interval  $\tau$  elektron pređe udaljenost:

$$s = \frac{a\tau^2}{2} \quad (0,25 b)$$

što znači da će srednja brzina elektrona biti:

$$u = \frac{s}{\tau} = \frac{a\tau}{2} = \frac{eE\tau}{2m} \quad (0,25 b)$$

ili u vektorskom obliku:

$$\vec{u} = -\frac{e\tau}{2m} \vec{E} \quad (0,25 b)$$

- 4) Gustoća struje će zavisiti od gustoće broja elektrona, njegovog električnog naboja i prosječne brzine:

$$\vec{j} = -ne\vec{u} = \frac{e^2 n \tau}{2m} \vec{E} \quad (0,25 b)$$

Pa je Ohmov zakon sa specifičnom provodljivošću dat kao:

$$\sigma = \frac{e^2 n \tau}{2m} \quad (0,25 b)$$

- 5) Svaki elektron prenosi svoju kinetičku energiju na kraju ubrzavanja tj. u trenutku sudara sa jonom:

$$E_k = \frac{mu_{max}^2}{2} = \frac{m}{2} \left( \frac{eE\tau}{m} \right)^2 \quad (3) \quad (0,25 b)$$

Po definiciji postoji  $n$  elektrona u zapremini od kubnog metra provodnika i svaki od njih prenosi svoju kinetičku energiju (3) u vremenskom intervalu  $\tau$ . Usljed toga, ukupna specifična energija  $Q_k$  koja je prenešena od strane elektrona na kristalnu rešetku po jedinici zapremine i po jedinici vremena je:

$$Q_k = \frac{nE_k}{\tau} = \frac{nm u^2}{2\tau} = \frac{e^2 n \tau}{2m} E^2 = \sigma E^2 \quad (0,25 b)$$

Ovaj izraz poklapa se sa izrazom (1), što nam dokazuje validnost Joule-Lenzovog zakona u Drude-ovom modelu.

#### DIO C. Magnetorezistencija

- 6) U prisustvu magnetnog polja jednačine kretanja za elektron su date kao:

$$m \frac{d\vec{u}}{dt} = -e\vec{E} - e\vec{u} \times \vec{B} \quad (0,25 b)$$

Projekcije na koordinatne  $x$ ,  $y$  i  $z$  ose su:

$$m \frac{du_x}{dt} = eE + eBu_y \quad (4)$$

$$m \frac{du_y}{dt} = -eBu_x \quad (5)$$

$$m \frac{du_z}{dt} = 0 \quad (6) \quad (0,5 b)$$

Relacija (6) nam pokazuje da trajektorija/putanja elektrona leži u XY ravni. Ukoliko uvedemo zamjenu koordinata:  $u'_x = u_x$  ,  $u'_y = u_y + E/B$  u jednačine (4) i (5), dobijemo:

$$m \frac{du'_x}{dt} = eBu'_y \quad (7)$$

$$m \frac{du'_y}{dt} = -eBu'_x \quad (8) \quad (0,5 b)$$

Rješenja za jednačine (7) i (8) dobiju se kao harmonijske oscilacije oblika:

$$u'_x = A \cos(\omega t + \alpha)$$

$$u'_y = A \sin(\omega t + \alpha) \quad (0,25 b)$$

Vraćanjem u originalne varijable, dobijemo tražene projekcije:

$$u_x = A \cos(\omega t + \alpha) \quad (9)$$

$$u_y = A \sin(\omega t + \alpha) - \frac{E}{B} \quad (10) \quad (0,25 b)$$

Iz početnih uslova da elektroni kreću iz stanja mirovanja  $u_x = 0, u_y = 0$  određujemo konstante  $A = E/B$  i  $\alpha = 2\pi$  (0,25 b)

Vraćajući sada ove konstante u jednačine (9) i (10), dobijemo konačni oblik:

$$u_x(t) = \frac{E}{B} \sin\left(\frac{eB}{m}t\right) \quad (11)$$

$$u_y(t) = -\frac{E}{B} \left[1 - \cos\left(\frac{eB}{m}t\right)\right] \quad (12) \quad (0,5 b)$$

- 7) Pri malim jačinama magnetnog polja tj. pri malim vrijednostima indukcije, jednačina (11) poprima oblik:

$$u_x = \frac{eE}{m}t - \frac{e^3EB^2}{6m^3}t^3 \quad (0,25 b)$$

Pomak elektrona duž Ox ose u vremenskom intervalu  $\tau$  je jednak:

$$s = \frac{eE}{2m}\tau^2 - \frac{e^3EB^2}{24m^3}\tau^4 \quad (0,25 b)$$

Pa je prosječna brzina elektrona tada:

$$u_{avg} = \frac{s}{\tau} = \frac{eE}{2m}\tau - \frac{e^3EB^2}{24m^3}\tau^3 \quad (0,5 b)$$

Iz ovoga, u mogućnosti smo da odredimo relativno odstupanje od specifične provodljivosti kao:

$$\frac{\Delta\sigma}{\sigma} = \frac{ne \cdot u_{avg}(B) - ne \cdot u_{avg}(B=0)}{ne \cdot u_{avg}(B=0)} = -\frac{1}{12} \left( \frac{e\tau B}{m} \right)^2 \quad (0,5 b)$$

Odatle nam je veoma lako odrediti tražene konstante:

$$\mu = -\frac{1}{12} \left( \frac{e\tau}{m} \right)^2, \quad \nu = 2 \quad (0,5 b)$$

DIO D. Hallov efekat

8) Lorentzove sile koje djeluju na elektrone su usmjerene prema dole. Zbog toga će se negativni naboj nagomilavati na dnu slike. (0,5 b)

9) Elektroni su nagomilani na dnu slike. Usljed toga je Hallovo električno polje usmjereno suprotno od Oy ose. Stoga će jednačina kretanja elektrona u ovom slučaju da bude:

$$m \frac{du_x}{dt} = eE + eBu_y$$

$$m \frac{du_y}{dt} = eE_H - eBu_x$$

$$m \frac{du_z}{dt} = 0 \quad (0,5 b)$$

Ponovo vidimo da je putanja/trajektorija elektrona u XY ravni. Praveći smjene da lakše riješimo ove diferencijalne jednačine:  $u'_x = u_x - E_H/B$  i  $u'_y = u_y + E/B$  dobijemo:

$$m \frac{du'_x}{dt} = eBu'_y \quad (7)$$

$$m \frac{du'_y}{dt} = -eBu'_x \quad (8) \quad (0,25 b)$$

Analogno kao u dijelu C, rješavamo kao harmonijske oscilacije:

$$u'_x = A \cos(\omega t + \alpha), \quad u'_y = A \sin(\omega t + \alpha)$$

Vraćanjem smjene, dobijemo originalne vrijednosti:

$$u_x = A \cos(\omega t + \alpha) + \frac{E_H}{B}, \quad u_y = A \sin(\omega t + \alpha) - \frac{E}{B} \quad (0,25 b)$$

Iz početnih uslova (analogno kao dio C) dobijemo konstante, pa imamo rješenje:

$$u_x(t) = \frac{E}{B} \sin\left(\frac{eB}{m}t\right) + \frac{E_H}{B} \left[1 - \cos\left(\frac{eB}{m}t\right)\right]$$

$$u_y(t) = \frac{E_H}{B} \sin\left(\frac{eB}{m}t\right) - \frac{E}{B} \left[1 - \cos\left(\frac{eB}{m}t\right)\right] \quad (0,5 b)$$



10) Pri malim vrijednostima magnetne indukcije, uslov da konačni pomak bude nula  $y(\tau) = 0$  duž Oy ose u trenutku  $\tau$ :

$$\int_0^{\tau} u_y(t) dt = 0 \quad \Rightarrow \quad E_H = \frac{eE\tau}{3m} B \quad (0,25 b)$$

$$E_H = \frac{2j}{3ne} B \quad (0,25 b)$$

## Rješenje – Metoda tranzita u potrazi za egzoplanetama

**A1.** U graničnom slučaju,

$$|\sin \alpha_{\max}| = \frac{R_* + R_p}{a} = \frac{R_*}{a} + \frac{R_p R_*}{R_* a} = \frac{R_*}{a} \left(1 + \frac{R_p}{R_*}\right).$$

Kako je u našoj pretpostavci  $R_p/R_* \ll 1$ , to je  $(1 + R_p/R_*) \approx 1$ , pa imamo:

$$|\sin \alpha_{\max}| \approx \frac{R_*}{a}.$$

Također, zbog  $R_*/a \ll 1$  vrijedi aproksimacija malih uglova,  $|\sin \alpha_{\max}| \approx |\alpha_{\max}|$ , pa konačno dobijamo:

$$|\alpha_{\max}| \approx \frac{R_*}{a}.$$

**A2.** Iz geometrije problema jednostavno se primjećuje da je  $\theta = 90^\circ - \alpha$ , pa je  $d\theta = -d\alpha$ . Slijedi:  $d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi = -\sin(90^\circ - \alpha) d\alpha d\varphi = -\cos \alpha d\alpha d\varphi$ , pa dobijamo:

$$\Delta\Omega = -\int_0^{2\pi} \int_{\alpha_{\max}}^{-\alpha_{\max}} \cos \alpha d\alpha d\varphi = \int_0^{2\pi} \sin \alpha \Big|_{-\alpha_{\max}}^{\alpha_{\max}} d\varphi \approx \int_0^{2\pi} 2\alpha_{\max} d\varphi = 4\pi\alpha_{\max}.$$

Tada je vjerovatnoća da se iz nasumično odabrane tačke u prostoru vidi tranzit:

$$P_{\text{transit}} = \frac{\Delta\Omega}{4\pi} = \alpha_{\max} \approx \frac{R_*}{a}.$$

**A3.** Na osnovu rezultata prethodnog dijela, dobijamo da je vjerovatnoća da vanjski posmatrač vidi tranzit Merkura jednaka  $P_M = 1.16\%$ , dok je za egzoplanetu tipa vrućeg Jupitera  $P_{VJ} = 9.28\%$ .

**B1.** Projektovana udaljenost koju planeta pređe preko diska zvijezde je (slika 1):

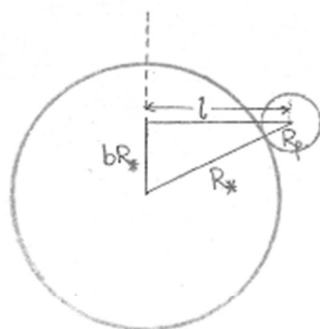
$$2l = 2\sqrt{(R_* + R_p)^2 - (bR_*)^2}.$$

Kako se vidi sa slike 2, planeta se zapravo kreće po luku od tačke A do B i pritom prebriše ugao  $\beta$ . Za cijelu orbitu, pređeni put je  $2\pi a$ , dužina luka od A do B je  $\beta a$ , dok je udaljenost po pravcu od A do B jednaka  $2l$ . Iz trougla koji formiraju A, B i centar zvijezde imamo:

$$\sin\left(\frac{\beta}{2}\right) = \frac{l}{a}.$$

Za uniformno kružno kretanje planete znamo da vrijedi:

~



Slika 1: Sa tačke gledišta posmatrača, planeta prividno pređe udaljenost  $2l$ .

gdje je  $T$  ukupni period planete koji možemo naći iz trećeg Keplerovog zakona:

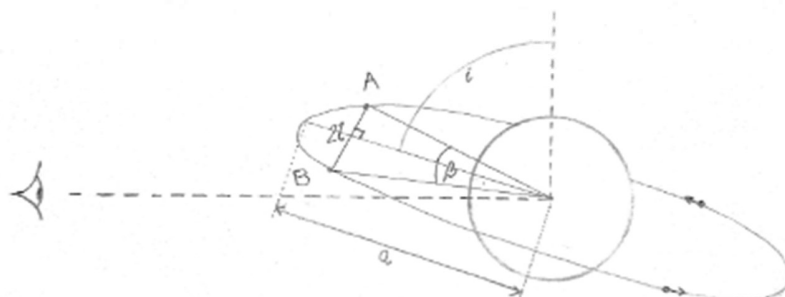
$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM_*} a^3.$$

Slijedi:

$$\tau_t = T \frac{\beta}{2\pi} = \frac{T}{\pi} \arcsin\left(\frac{l}{a}\right).$$

Uvrštavajući, konačno dobijamo:

$$\tau_t = 2\sqrt{\frac{a^3}{GM_*}} \arcsin\left(\frac{R_*}{a} \sqrt{(1+k)^2 - b^2}\right).$$



Slika 2: Orbitalna geometrija planete u tranzitu. (Inače, planeta izlazi i ulazi u papir kružeći oko zvijezde, ali je ovdje radi preglednosti prikazana pomalo iskrivljena orbitalna ravan.)

**B2.** Ako je ugao inklinacije  $90^\circ$ , to je  $b = 0$ , pa se naša formula za vrijeme trajanja tranzita svodi na:

$$\tau_0 = 2\sqrt{\frac{a^3}{GM_*}} \arcsin\left(\frac{R_*}{a}(1+k)\right).$$

U poznatim aproksimacijama  $R_p \ll R_* \ll a$ , tj.  $k \ll 1$ , imamo  $\arcsin(R_*/a) \approx R_*/a$ , pa je

$$\tau_0 \approx 2R_* \sqrt{\frac{a}{GM_*}}.$$

Za Merkur,  $\tau_{0,M} = 8.2$  h, a za vrući Jupiter,  $\tau_{0,VJ} = 2.9$  h.

**B3.** Za  $\tau_f = t_{III} - t_{II}$  treba samo uzeti  $(R_* - R_p)$  umjesto  $(R_* + R_p)$  u formuli za udaljenost  $l$  (dio B1), tako da se dobija:

$$\tau_f = 2 \sqrt{\frac{a^3}{GM_*}} \arcsin\left(\frac{R_*}{a} \sqrt{(1-k)^2 - b^2}\right).$$

**C1.** Određujući razmjer linijarom i potom računajući razmak između trouglova dobije se 383.333 dana. Tačnije (posmatrajući sliku po pikselima) može se dobiti  **$T = 385.535$  dana = 1.056 godina**. Jenkins et al. (2015) navode  $T = 384.843$  dana = 1.054 godina. (Priznati rezultate u intervalu od 380 do 400 dana.)

**C2.** Na osnovu trećeg Keplerovog zakona, možemo izraziti radijus orbite planete preko perioda:

$$a = \sqrt[3]{\frac{GM_*}{4\pi^2}} T^{\frac{2}{3}}.$$

Dobija se  $a = 1.044$  AU, odnosno za tačniji rezultat,  **$a = 1.048$  AU**. Jenkins et al. navode  $a = 1.046$  AU. (Priznati rezultate u intervalu od 1.040 AU do 1.070 AU.)

**C3.** Neka je  $F$  fluks svjetlosti kada planeta ne tranzitira. Tada, ako sa  $\Delta F$  označimo promjenu fluksa prilikom tranzita (razlika fluksa prije tranzita i fluksa tokom tranzita), znajući da je fluks proporcionalan površini, a površina kvadratu radijusa, vrijedi odnos:

$$\frac{\Delta F}{F} = \frac{R_p^2}{R_*^2},$$

zanemarujući fluks koji potječe od planete i pretpostavljajući da je disk zvijezde uniformno svijetao. Veličinu sa lijeve strane (relativnu promjenu fluksa, odnosno tzv. "dubinu tranzita"  $\delta$ ) očitavamo direktno na y-osi (kao vrijednost minimuma na grafiku), a radijus zvijezde znamo iz postavke zadatka. Određujući razmjer linijarom, može se dobiti  $\Delta F/F = 0.000198$ . Tačnije (posmatrajući sliku po pikselima) može se dobiti  $\Delta F/F = 0.000195$ .

Tada je  **$R_p = 10790$  km**, odnosno  **$R_p = 1.69R_{\oplus}$** . Jenkins et al. navode  $R_p = 1.63R_{\oplus} \approx 10385$  km. (Priznati rezultate u intervalu od  $1.60R_{\oplus}$  do  $1.80R_{\oplus}$ .)

Primijetimo kako je potrebna velika preciznost u mjerenju fluksa za opažanje tranzita, jer se konkretno u ovom slučaju određuje relativna promjena od oko 0.02%.

**C4.** Iz formule

$$\tau_t = 2 \sqrt{\frac{a^3}{GM_*}} \arcsin\left(\frac{R_*}{a} \sqrt{(1+k)^2 - b^2}\right)$$

može se izraziti parametar  $b$  preko poznatih veličina:

$$b = \sqrt{(1+k)^2 - \left[ \frac{a}{R_*} \sin \left( \frac{1}{2} \tau_t \sqrt{\frac{GM_*}{a^3}} \right) \right]^2},$$

gdje je  $k = R_p/R_* = \sqrt{\Delta F/F}$  i  $\tau_t \approx 11.2$  h (sa grafika). Uvrštavajući (i pazeći da je kalkulator podešen na radijane prilikom računanja sin), dobija se  $b = 0.654$ . Jenkins et al. navode  $b = 0.690$ . (Priznati rezultate u intervalu od 0.60 do 0.70.)

Iz formule  $bR_* = a \cos i$  jednostavno se dobije da je

$$i = \arccos \left( \frac{bR_*}{a} \right) = 89.815^\circ.$$

Jenkins et al. navode  $i = 89.806^\circ$ . (Priznati rezultate u intervalu od  $89.7^\circ$  do  $89.9^\circ$ .)

**C5.** Ukupna snaga koju zrači zvijezda je prema Stefan-Boltzmannovom zakonu  $P_* = 4\pi R_*^2 \sigma T_*^4$ . Snaga zračenja koje pada na planetu (efektivno disk radijusa  $R_p$ ) može se naći preko odnosa površina (i to površine diska planete i površine zamišljene sfere radijusa jednakog radijusu orbite  $a$ ):

$$\frac{P_p}{P_*} = \frac{\pi R_p^2}{4\pi a^2}.$$

Efektivno, planeta prima snagu zračenja  $P_{in} = P_p(1-A)$ , pa kombinujući sve imamo:

$$P_{in} = 4\pi R_*^2 \sigma T_*^4 (1-A) \frac{\pi R_p^2}{4\pi a^2}.$$

S druge strane, planeta sa svoje površine zrači snagom

$$P_{out} = 4\pi R_p^2 \sigma T_{eq}^4.$$

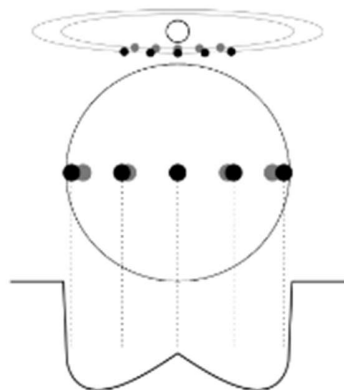
U ravnotežnom stanju,  $P_{in} = P_{out}$ , pa dobijamo (nakon što se sve skрати):

$$T_{eq} = T_* \sqrt{\frac{R_*}{2a}} \sqrt[4]{1-A}.$$

Uvrštavajući, dobije se  $T_{eq} \approx 261 \text{ K} = -12^\circ \text{ C}$ . Jenkins et al. navode  $T_{eq} = 265 \text{ K} = -8^\circ \text{ C}$ . (Priznati rezultate u intervalu od 255 K do 270 K.)

**C6.** Po svemu izračunatom, planeta Kepler-452b je veoma slična Zemlji u pogledu udaljenosti od zvijezde, radijusa i perioda orbite. Zbog svoje mase i veličine (i velike vjerovatnoće da je stjenovite građe) spada u kategoriju planeta poznatih kao super-Zemlje. Još jedna važna stvar za naseljivost planete je njena atmosfera (od toga će uveliko i zavisiti površinska temperatura koju smo pokušali procijeniti iznad). Međutim, još uvijek nemamo instrumente kojima je moguće precizno ispitati postojanje i sastav atmosfera egzoplaneta poput Kepler-452b.

Ipak, nadimak "Zemlja 2.0" čini se kao potpuno prikladan, s obzirom na to da je od svih egzoplaneta koje smo dosad pronašli najbližnja našem plavom klikeru, ali će vjerovatno proći neko vrijeme prije nego što ona, ili bilo koja druga, bude mogla postati drugi dom čovječanstva.



Slika 3: Tranzitirajuća planeta (crni disk) sa tijelom na  $\mathcal{L}_1$  (sivi disk) sa odgovarajućom normalizovanom svjetlosnom krivom.

**D1.** Treba zapamtiti da u rotirajućem sistemu referencije, tijelo na  $\mathcal{L}_1$  miruje u odnosu na zvijezdu i planetu. Mogući izgled tranzita prikazan je na slici 3.

Sa tačke gledišta udaljenog posmatrača, planeta kasni za objektom prilikom ulaska i registrovani fluks je minimalan. Kako planeta prividno sustiže objekat (zbog veće linijske brzine), fluks se povećava i dostiže lokalni maksimum, a potom planeta predvodi ispred objekta tokom izlaska, pri čemu se javlja drugi minimum. Treba primijetiti kako je situacija jako simetrična, što se reflektuje i očitava u simetriji same svjetlosne krive.

**D2.** Nadimo prvo izraz za ugaonu brzinu kojom tijela rotiraju oko zajedničkog centra mase (pretpostavljajući da malo tijelo na  $\mathcal{L}_1$  ne utječe na položaj centra mase). Ono što ćemo zapravo dobiti je poopšteni oblik trećeg Keplerovog zakona. Ishodište koordinatnog sistema postaviti ćemo u centar mase, tako da su centri zvijezde i planete na položajima  $x_*$  i  $x_p$  respektivno. Za planetu vrijedi:

$$M_p \omega^2 x_p = G \frac{M_p M_*}{a^2}, \quad \omega^2 = G \frac{M_*}{x_p a^2}.$$

Množeći brojnik i nazivnik sa  $a = x_p - x_*$  (zbog negativne vrijednosti  $x_*$ ) dobijamo:

$$\omega^2 = G \frac{M_* x_p - M_* x_*}{x_p a^3},$$

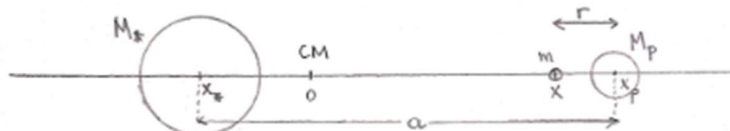
pa koristeći jednačinu za položaj centra mase  $M_p x_p + M_* x_* = 0$  konačno imamo:

$$\omega^2 = G \frac{M_* + M_p}{a^3}.$$

Ako sada postavimo objekat mase  $m$  u tačku  $\mathcal{L}_1$ , na udaljenosti  $r$  od planete, ukupna gravitaciona sila na objekat je:

$$F = G \frac{m M_*}{(a-r)^2} - G \frac{m M_p}{r^2}$$

i mora biti jednaka centripetalnoj sili (sa istom ugaonom brzinom oko centra mase izračunatom iznad, gdje je sada  $x$  udaljenost objekta od centra mase zvijezde i planete):



Slika 4: Koordinatni sistem za dio D2.

$$m\omega^2 x = G \frac{mM_*}{(a-r)^2} - G \frac{mM_p}{r^2}.$$

Sada treba izraziti  $x$  preko poznatih veličina. Možemo ponovo koristiti jednačinu za položaj centra mase, te primijetiti da je  $x = x_p - r$ , kao i  $x_p = a + x_* = a - (M_p/M_*)x_p$ , odakle je  $x_p = a/(1 + (M_p/M_*)) = aM_*/(M_* + M_p)$ . Slijedi da je  $x = aM_*/(M_* + M_p) - r$ , pa uvrštavajući dobijamo:

$$\frac{M_* + M_p}{a^3} \left( a \frac{M_*}{M_* + M_p} - r \right) = \frac{M_*}{(a-r)^2} - \frac{M_p}{r^2}.$$

Uz smjene

$$z = \frac{r}{a}, \quad \mu = \frac{M_p}{M_* + M_p},$$

i malo algebarske manipulacije, dobijamo da je rješenje za  $z$  jedini realni korijen jednačine petog stepena:

$$z^5 - z^4(3 - \mu) + z^3(3 - 2\mu) - z^2\mu + z(2\mu) - \mu = 0.$$

Ovu jednačinu nije nimalo jednostavno riješiti; štaviše, vjerovatno ne postoji jednostavno analitičko rješenje (u obliku formule). Mogla bi se riješiti numerički ili grafički, ali mi ćemo napraviti neke (grube) aproksimacije i dobiti aproksimativno analitičko rješenje. Prvo, zanemarit ćemo članove četvrtog i petog stepena, jer pretpostavljamo da je  $z$  malo ( $r \ll a$ ). Pored toga, kako je i  $\mu$  malo, zanemarujemo mješovite članove (koji sadrže kombinaciju  $z$  i  $\mu$ ), pa dobijamo:

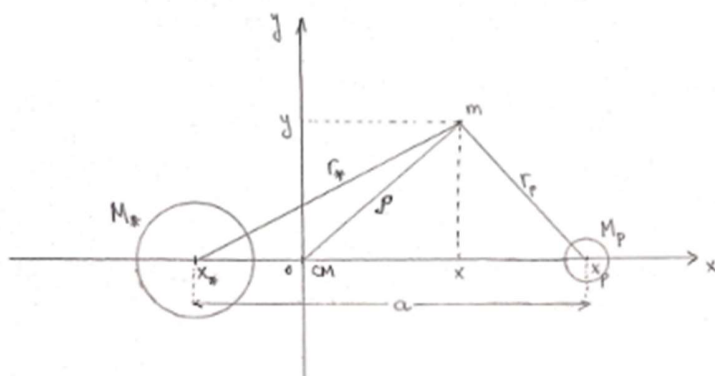
$$3z^3 - \mu \approx 0,$$

i konačno za udaljenost tačke  $\mathcal{L}_1$  od planete dobijamo:

$$r \approx a \sqrt[3]{\frac{M_p}{3(M_* + M_p)}} \approx a \sqrt[3]{\frac{M_p}{3M_*}}.$$

**D3.** Posmatrajmo situaciju ponovo iz referentnog sistema koji oko centra mase rotira ugaonom brzinom  $\omega$  jednakom orbitalnoj ugaonoj brzini zvijezde i planete. Radit ćemo sa generalnim slučajem i poslije izvući zaključke za potrebne specijalne slučajeve. Ipak, dovoljno je problem posmatrati u  $xy$  ravni koja je orbitalna ravan zvijezde i planete.

U ovom referentnom sistemu (koji je neinercijalan), ukupna potencijalna energija tijela sadrži tri člana:



Slika 5: Koordinatni sistem za dio D3.

$$U = -G \frac{mM_*}{r_*} - G \frac{mM_p}{r_p} - \frac{1}{2}m(\rho\omega)^2.$$

Ovdje je  $\rho$  udaljenost tijela od ishodišta (centra mase). Prva dva člana predstavljaju gravitacionu potencijalnu energiju usljed prisustva zvijezde i planete respektivno ( $r_*$  i  $r_p$  su udaljenosti tijela od planete i zvijezde), dok je treći član centrifugalna potencijalna energija (usljed izbora rotirajućeg sistema). Prema tome, efektivni potencijal je:

$$\Phi_{\text{eff}} = -G \frac{M_*}{\sqrt{(x-x_*)^2 + y^2}} - G \frac{M_p}{\sqrt{(x-x_p)^2 + y^2}} - \frac{1}{2}G \frac{M_* + M_p}{a^3} (x^2 + y^2),$$

gdje su (dio D2):

$$x_* = -\frac{a}{1 + \frac{M_*}{M_p}}, \quad x_p = \frac{a}{1 + \frac{M_p}{M_*}}.$$

Ukoliko ovaj efektivni potencijal prikazemo kao funkciju u prostoru, dobijamo izgled površine potencijala kao na slici 6. Duž pravca koji spaja dva masivna tijela, funkcija efektivnog potencijala ima oblik prikazan na slici 7.

Nije teško vidjeti zašto su upravo Lagrangeove tačke ravnotežne tačke. Naime, tačke  $\mathcal{L}_1$ ,  $\mathcal{L}_2$  i  $\mathcal{L}_3$  su kolinearne i leže na pravcu koji spaja dva tijela. One su sedlaste tačke i time tačke labilne (nestabilne) ravnoteže. Tačke  $\mathcal{L}_4$  i  $\mathcal{L}_5$  su lokalni maksimumi (vizualizirane kao vrh brda). Shodno tome, očekivali bismo da su i one nestabilne, no pokazuje se da pri pomjeranju tijela od te tačke, na tijelo djeluje Coriolisova sila koja zakreće trajektoriju tijela prema toj tački, a ne dalje od nje.

Pokažimo i matematički da je  $\mathcal{L}_1$  tačka nestabilne ravnoteže. Već znamo da je prvi izvod (sila) potencijalne energije date jednačinom iznad jednak nuli (taj uslov smo i koristili u dijelu D2). Trebali bismo sada dobiti da je drugi izvod potencijala po položaju u tački  $\mathcal{L}_1$  manji od nule, što znači da je posmatrana tačka lokalni maksimum.

Napišimo prvo ponovo izraz za potencijalnu energiju (sada radimo samo duž x-ose):

$$U = -G \frac{mM_*}{|x-x_*|} - G \frac{mM_p}{|x-x_p|} - \frac{1}{2}m(x\omega)^2.$$



Ponovo se vratimo na naše veličine sa slike 4, tj. zamijenimo  $x_p - x = r$ ,  $x - x_* = a - r$ . Dobijamo:

$$U = -G \frac{mM_*}{a-r} - G \frac{mM_p}{r} - \frac{1}{2}m(x\omega)^2.$$

Nadimo sada izvod po  $x$ , vodeći računa da je  $r$  funkcija od  $x$ , tj.  $r = r(x)$ , pa je  $\frac{d}{dx}[f(r)] = \frac{d}{dr}[f(r)]\frac{dr}{dx}$ , gdje je  $\frac{dr}{dx} = -1$ . Uzimajući sve u obzir, dobijamo da je:

$$\frac{dU}{dx} = G \frac{mM_*}{(a-r)^2} - G \frac{mM_p}{r^2} - m\omega^2 x.$$

U Lagrangeovim tačkama (npr.  $\mathcal{L}_1$ ),  $dU/dx = 0$ , pa dobijamo tačno onu relaciju koju smo koristili u dijelu D2 (ukupna sila jednaka nuli). Dalje, drugi izvod je:

$$\frac{d^2U}{dx^2} = -2G \frac{mM_*}{(a-r)^3} - 2G \frac{mM_p}{r^3} - m\omega^2.$$

Primijetimo da je drugi izvod potencijalne energije negativan u svim tačkama, pa se i uvrštavanjem našeg rješenja za  $r$  na  $\mathcal{L}_1$  dobije negativna vrijednost u izrazu (jer su sve fizičke veličine koje se pojavljuju pozitivne), što potvrđuje tvrdnju da je  $\mathcal{L}_1$  **tačka nestabilne ravnoteže**.

Ukoliko se tijelo nađe na nekoj od prve tri Lagrangeove tačke (npr.  $\mathcal{L}_1$ ), svaka mala devijacija od precizne pozicije na njoj će destabilizirati orbitu tijela i ono će napustiti tu Lagrangeovu tačku (to su tačke labilne ravnoteže). **Dakle, tijelo koje na duže vrijeme ostaje u  $\mathcal{L}_1$  je gotovo sigurno vještačko, odnosno kontrolisano**, jer je za održavanje tijela na  $\mathcal{L}_1$  neophodno povremeno korigovati njegov položaj/orbitu (upravo zbog malih prirodnih perturbacija koje bi ga destabilizovale). Mnogi naši sateliti su locirani na  $\mathcal{L}_1$  ili  $\mathcal{L}_2$  tački za sistem Sunce - Zemlja (naprimjer James Webb svemirski teleskop) i njihove orbite je zaista s vremena na vrijeme potrebno korigovati. Čak je i za kvazi-stabilne halo orbite oko  $\mathcal{L}_1$  ili  $\mathcal{L}_2$  (koje zaista postoje) ipak potrebno određeno korigovanje. Stoga bi otkriće objekta sa korigovano-stabilnom orbitom na nekoj od ovih Lagrangeovih tačaka (kako se to desilo u filmu) bio gotovo siguran dokaz za postojanje inteligentne i tehnološki napredne vanzemaljske civilizacije.

## Rezultati XXVII Federalnog takmičenja iz fizike za učenike srednjih škola

<b>GRUPA A - MEHANIKA I TERMODINAMIKA</b>								
<b>Rang</b>	<b>Ime i prezime</b>	<b>Škola</b>	<b>Razred</b>	<b>Z1</b>	<b>Z2</b>	<b>Z3</b>	<b>Z4</b>	<b>SUMA</b>
1	Maximilian Aaron Jelačić	KŠC "Sv. Josip" Sarajevo	I	25	9.5	16	24	74.5
2	Lejla Baturić	Behram begova medresa	II	25	12	6	25	68
3	Alden Mekić	Četvrta gimnazija Ilidža	III	25	14.5	13.5	4	57
4	Ismar Hamzić	JU Mustafa Novalić	IV	25	7.5	10	0	42.5
5	Samel Ribić	Treća gimnazija Sarajevo	I	3	5	17.5	17	42.5
6	Ahmed Spahić	Druga gimnazija Sarajevo	III	25	11.5	5	0	41.5
7	Dragan Boban	Gimnazija fra Grge Martića	II	25	1.5	5.5	7	39
8	Kenan Muhamedbegović	Elektrotehnička škola Tuzla	I	25	1	6	0	32
9	Emina Sarajlić	Gimnazija "Dr. Mustafa Kamarić	IV	25	3.5	1	2	31.5
10	Emina Suljić	Treća gimnazija Sarajevo	III	13	8	4.5	5	30.5
11	Adrian Mišić	Druga gimnazija Sarajevo	I	25	1	3	0	29
12	Faruk Kurić	Prva gimnazija Zenica	II	10	4	3	5	22
13	Imran Tabaković	PBGS	I	10	4	5	2	21
14	Lamija Kubat	Gimnazija Muhsin Rizvić	II	10	1	5.5	2	18.5
15	Harun Čufurović	RPCB	I	7	7.5	1	2	17.5
16	Samed Sudžuka	Elektrotehnička škola Tuzla	I	10	1.5	6	0	17.5
17	Rabija Serdarevic	PBGS	I	7	4.50	5.5	0	17
18	Emin Buza	Gimnazija Visoko	II	3	5	3	5	16
19	Annur Mešić	PBGS	I	7	1	6	2	16
20	Ivan Radoš	MSTŠT	I	7	5	4	0	16
21	Ena Heco	Medicinska škola Zenica	II	7	0.5	1	5	13.5
22	Sani Bašić	MŠŠ Enver Pozderović	III	7	2	4.5	0	13.5
23	Inas Dervišić	MŠŠ Donji Vakuf	I	7	0	2	2	11

24	Mario Šantić	KŠC Sveti Pavao	II	1	0.5	7	2	10.5
25	Nejla Mameledžija	MSŠT	II	7	0	0	2	9
26	Tarik Ramić	JU Gimnazija Cazin	I	0	6	0	2	8
27	Tarik Mujkanović	Gimnazija Mustafa Novalić	IV	7	0	1	0	8
28	Anes Lapo	Srednja škola Konjic	II	3	1.5	3	0	7.5
29	Hana Maksumić	Gimnazija Muhsin Rizvić	I	3	0.5	1.5	2.00	7
30	Aner Šabić	MSŠ "Prof. Omer Filipović"	IV	7	0	0	0	7
31	Sead Bradić	MSTŠT	I	3	2.5	1	0	6.5
32	Đorđe Begović	STŠ Hasib H Goražde	II	0	2.5	3	0	5.5
33	Ena Maksumić	Druga gimnazija Mostar	II	3	0	2.5	0	5.5
34	Amir Džafić	MSŠ Enver Pozderović	III	1	1.5	1	2	5.5
35	Hena Zukić	MSŠ Gimnazija	II	3	1.5	1	0	5.5
36	Lamija Sabitović	JU Srednja škola Jablanica	II	3	0.5	1.5	0	5
37	Tarik Avdagić	Gimnazija Dobrinja	I	1	0	3.5	0	4.5
38	Luka Penavić	Gimnazija fra Grge Martića	II	0	0	4	0	4
39	Danis Begović	Druga gimnazija Sarajevo	I	3	0	0	0	3
40	Hamza Kurtić	MSŠ Enver Pozderović	III	0	1	0.5	0	1.5

GRUPA B – ELEKTROMAGNETIZAM, OSCILACIJE I TALASI									
Rang	Ime i prezime	Škola	Mjesto	Razred	Z1	Z2	Z3	Z4	SUMA
1	Husein Jašić	Behram-begova Medresa	Tuzla	III	17	20	24	30	91
2	Darijo Obad	Srednja škola Čapljina	Čapljina	III	20	20	29,5	7	76,5
3	Vedad Kozica	Druga gimnazija	Sarajevo	II	15	20	14,5	19	68,5
4	Nedim Begović	Druga gimnazija	Sarajevo	II	8	20	18	21	67
5	Mustafa Čeho	SMS Zijah Dizdarević	Fojnica - Kiseljak	II	14	16	8	10	48
5	Filip Krištić	KŠC "Sveti Josip"	Sarajevo	II	10	20	14	4	48
7	Magdalena Grbavac	Gimnazija fra Grge Martića	Mostar	III	8	19	15	3	45
8	Ana Tomić	Gimnazija fra Grge Martića	Mostar	III	4	20	11	6	41
9	Elmas Ekinović	Prva gimnazija	Zenica	II	3	16	21	0	40
10	Antonija Bošković	Gimnazija fra Grge Martića	Mostar	III	5	20	5	9	39
10	Danis Fejzić	Druga gimnazija	Sarajevo	II	2	15	9	10	36
12	Salih Šehić	MSŠ Doboj Istok	Doboj Istok	IV	15	10	10,5	0	35,5
13	Ammar Turbić	Gimnazija "Mustafa Novalić"	Gradačac	III	5	20	9	0	34
14	Selma Prohan	MSŠ Travnik	Travnik	III	0	20	12,5	1	33,5
15	Haris Torlak	Druga gimnazija	Sarajevo	III	0	16	12	3	31
16	Ajša Brka	Gimnazija "Muhsin Rizvić"	Kakanj	III	0	17	12	0	29
17	Muharem Agić	STŠ "Salih Salko Ćurić"	Mostar	III	17	0	10	1	28
18	Dževad Zejčirović	Gimnazija Živinice	Živinice	III	5	0	13	9	27
19	Amna Imamović	Gimnazija "Meša Selimović"	Tuzla	III	3	0	15,5	2	20,5
20	Aldin Velić	Gimnazija "Muhsin Rizvić"	Kakanj	III	3	0	14	3	20
21	Hamza Bubalo	Srednja škola Konjic	Konjic	III	3	16	0	0	19
22	Amar Operta	Gimnazija Visoko	Visoko	III	12	0	3,5	1	16,5
23	Sarah Mrakić	MSŠ Travnik	Travnik	III	0	0	15	0	15
24	Adna Husić	Gimnazija Velika Kladuša	Velika Kladuša	III	12	0	0,5	1	13,5
25	Faris Brzina	Srednja mješovita škola	Žepče	III	5	0	5,5	1	11,5
26	Sajra Malkić	Gimnazija Bihać	Bihać	III	8	0	0,5	1	9,5
27	Ajdina	Gimnazija Visoko	Visoko	II	0	0	2	1	3

	Herceglja								
28	Džejlana Šetka	Srednja škola Stolac	Stolac	II	0	0	0	0	0
29	Ilma Hodžić	MSTŠ Travnik	Travnik	II	0	0	0	0	0

**GRUPA C - OPTIKA, ATOMSKA I NUKLEARNA FIZIKA**

<b>Rang</b>	<b>Ime i prezime</b>	<b>Škola</b>	<b>Razred</b>	<b>Z1</b>	<b>Z2</b>	<b>Z3</b>	<b>Z4</b>	<b>SUMA</b>
1	Affan Kaknjo	Prva gimnazija Zenica	3	25	6	25	12	<b>68</b>
2	Tahira Ibrišević	Gimnazija "Visoko"	4	15	0	22	25	<b>62</b>
3	Tajra Čavčić	Druga gimnazija Sarajevo	4	16	1	25	11. 5	<b>53.5</b>
4	Lamija Gilić	Treća gimnazija Sarajevo	4	12	1	25	10	<b>48</b>
5	Kerim Mujkanović	Gimnazija M.Čazim Čatić	3	15	1	25	4	<b>45</b>
6	Davud Japalak	Treća gimnazija Sarajevo	4	13	1	24	6	<b>44</b>
7	Fatima Aletić	MSŠ "Gimnazija Bugojno"	4	15	2	15	6	<b>38</b>
8	Azra Imamović	MSŠ Živinice	4	18	1	15	2	<b>36</b>
9	Alma Sarač	Gimnazija "Visoko"	4	11	4	16	4.5	<b>35.5</b>
9	Asja Rahmanović	Druga gimnazija Sarajevo	4	15	0	15	5.5	<b>35.5</b>
11	Tomislav Šilić	Gimnazija Fra Grge Martića	4	14	0	15	5.5	<b>34.5</b>
12	Leona Marijanović	Gimnazija Fra Grge Martića	4	13	0	15	1.5	<b>29.5</b>
13	Jakov Zeleničić	Gimnazija Fra Grge Martića	4	13	1	13	1.5	<b>28.5</b>
14	Usama Khedr	MSŠ Travnik	4	15	0	6	5	<b>26</b>
15	Esmir Zoletić	Gimnazija Živinice	4	12	1	8	4	<b>25</b>
16	Rubina Rekić	JU Gimnazija Cazin	4	7	2	13	2	<b>24</b>
17	Hana Zaimović	Gimnazija Muhzin Rizvić	4	2	2	15	2.5	<b>21.5</b>
18	Bakir Selimović	Gimnazija Živinice	3	6	1	10	4	<b>21</b>
19	Farah Terzić	Gimnazija Bugojno	4	4	2	13	1	<b>20</b>
19	Osman Puščul	Gimnazija "Visoko"	3	0	5	10	5	<b>20</b>
19	Malik Zubić	JU MSŠ "Hazim Šabanović"	3	7	1	12	0	<b>20</b>
22	Vedad Selimović	JU MSŠ "Enver Pozderac"	4	10	1	7	1.5	<b>19.5</b>
23	Elma Velić	Gimnazija Bihać	4	4	2	8	4.5	<b>18.5</b>
24	Haris Macić	Srednja škola Konjic	4	6	1	10	0	<b>17</b>
25	Lejla Nuhić	Druga gimnazija Mostar	4	4	1	11	0	<b>16</b>
26	Naida Pjanić	Gimnazija "Meša Selimović"	4	5	0	8	1	<b>14</b>

26	Maida Biber	Srednja škola Konjic	4	5	1	8	0	<b>14</b>
28	Semir Jamaković	STŠ Hasib Hadžović Goražde	4	1	0	12	0.5	<b>13.5</b>
29	Vedad Grabus	Prva gimnazija Zenica	4	2	0	11	0	<b>13</b>
30	Damir Muharem	STŠ "Hasib Hadžović"	3	2	0	10	0	<b>12</b>
31	Ajna Jašarspahić	STŠ "Kemal Kapetanović"	2	0	0	10	0	<b>10</b>
32	Damir Borčak	MSŠ Enver Pozderović Goražde	4	4	1	2	0.5	<b>7.5</b>
33	Nina Bešlagić	Prva gimnazija Zenica	4	0	0	3	0.5	<b>3.5</b>
34	Selim Selimović	MSŠ "Omer Filipović"	4	0	2	0	0	<b>2</b>
35	Azra Hamzić	Richmond Park ISS	4	0	0	1	0	<b>1</b>

<b>GRUPA D - CJELOKUPNA FIZIKA</b>							
<b>Rang</b>	<b>Ime i prezime</b>	<b>Škola</b>	<b>Razred</b>	<b>Z1 (8 b)</b>	<b>Z2 (10 b)</b>	<b>Z3 (12 b)</b>	<b>SUMA</b>
1	Dženan Midžić	Gimnazija Bihać	IV	5.4	3.9	3.4	<b>12.7</b>
2	Muhamed Numanović	Richmond Park ISS Tuzla	II	2.65	3.2	6.2	<b>12.05</b>
3	Esmā Jakupović	Prva bošnjačka gimnazija	IV	1.7	5.4	0.8	<b>7.9</b>
3	Tarik Mujkić	Gimnazija "Rizah Odžečkić", Zavidovići	IV	2.5	4	1.4	<b>7.9</b>
5	Elmir Kevilj	Gimnazija "Muhsin Rizvić" Kakanj	IV	0.4	2.3	3.5	<b>6.2</b>
6	Adna Mujkanović	Gimnazija "Musa Čazim Čatić"	IV	1.9	2.2	0.8	<b>4.9</b>
7	Alem Karić	Druga Gimnazija Sarajevo	III	0	3	0	<b>3</b>
8	Emina Hasanbegović	Druga Gimnazija Sarajevo	III	0.4	1.8	0	<b>2.2</b>
9	Adin Frljak	Prva bošnjačka gimnazija	IV	0	0.4	1.7	<b>2.1</b>
10	Tarik Agić	Prva bošnjačka gimnazija	III	0	0.5	0.5	<b>1</b>
11	Matej Šejo	Srednja škola dr. fra. Slavka Barbarića, Čitluk	IV	0.1	0.8	0	<b>0.9</b>
12	Luka Jerković	Srednja elektrotehnička škola Ruđer Bošković, Mostar	IV	0	0	0.1	<b>0.1</b>